

PENDULE DOUBLE PLAN DISQUE/TRIANGLE

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère un système mécanique en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Ce système est formé par l'assemblage de deux systèmes, rigides et homogènes, articulés entre eux et astreint à évoluer dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) . On suppose l'existence d'un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = g \vec{x}$.

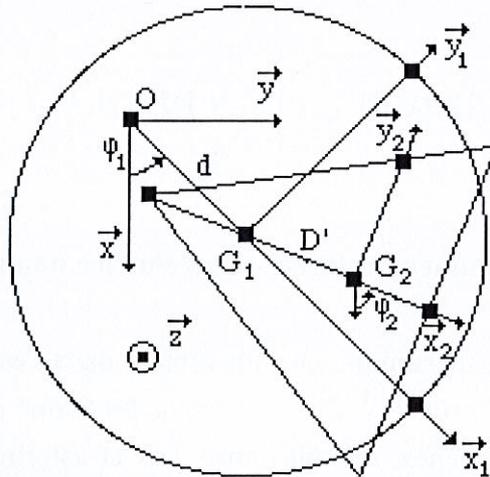
Le premier système est un disque S_1 peu épais de rayon a dont $R_1 = (G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est le repère lié (de base b_1), G_1 désignant son centre de masse. On note : $\varphi_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$. Il est en rotation sur un bâti fixe (dont R est le repère lié) autour de l'axe (O, \vec{z}) de telle sorte que : $\vec{OG}_1 = d \vec{x}_1 = (a/2) \vec{x}_1$. La liaison entre le bâti fixe et S_1 est une liaison rotoïde d'axe (O, \vec{z}) supposée parfaite. Le système S_1 est schématisé par un disque sans épaisseur dont μ_1 est la répartition surfacique de masse et m la masse. On donne la matrice d'inertie du disque :

$$[J_{G_1}(S_1)]^{b_1} = \frac{m a^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le second système est un triangle équilatéral S_2 peu épais de côté $2a$ dont $R_2 = (G_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ est le repère lié (de base b_2), G_2 désignant son centre de masse. On note : $\varphi_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2)$. Il est en rotation sur le disque autour de l'axe (G_1, \vec{z}) de telle sorte que : $\vec{G}_1 G_2 = D' \vec{x}_2 = a \vec{x}_2$. La liaison entre le disque et S_2 est une liaison rotoïde d'axe (G_1, \vec{z}) supposée parfaite. Le système S_2 est schématisé par un triangle sans épaisseur dont μ_2 est la répartition surfacique de masse et $m/4$ la masse. On donne la matrice d'inertie du triangle :

$$[J_{G_2}(S_2)]^{b_2} = \frac{m a^2}{24} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On définit le système S comme étant la réunion des systèmes S_1 et S_2 .



1. CINEMATIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

- 1.1. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_1 par rapport à R en O et G_1 .
- 1.2. Donner l'expression des éléments de réduction du torseur cinématique de S_2 par rapport à R en G_2 .

2. CINETIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

- 2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur cinétique par rapport à R du solide S_1 .
- 2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur cinétique par rapport à R du solide S_2 .
- 2.3. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur cinétique par rapport à R du système S.
- 2.4. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur dynamique par rapport à R du solide S_1 .
- 2.5. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et O du torseur dynamique par rapport à R du solide S_2 .
- 2.6. Donner l'expression des éléments de réduction en O du torseur dynamique par rapport à R du système S.

3. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

- 3.1. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S₁.
- 3.2. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en G₁ des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S₂.
- 3.3. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en O des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur S.
- 3.4. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S₁ (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
- 3.5. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S₂ (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
- 3.6. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
- 3.7. Donner l'expression des composantes des torseurs schématisant les sollicitations, en fonction des paramètres associés aux degrés de libertés des systèmes (c'est-à-dire en fonction de φ₁, φ₂ et de leurs dérivées).
- 3.8. Montrer que les équations du mouvement se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{8} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{3} \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{8} \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{g}{4a} \sin \varphi_2 = 0 \\ \frac{13}{2} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{5g}{a} \sin \varphi_1 = 0 \end{cases}$$

4. ÉTUDE D'UN MOUVEMENT PARTICULIER

- 4.1. On peut montrer que la configuration d'équilibre stable est la position (P₁) définie par : φ₁ = 0, φ₂ = 0. On étudie désormais des mouvements voisins de cette position. Linéariser les équations générales et montrer qu'en posant : φ₁ = 0 + ε₁, φ₂ = 0 + ε₂, où les paramètres ε₁ et ε₂ sont astreints à rester petits ainsi que leur dérivée, alors les équations du mouvements s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 + \frac{8}{3} \dot{\varepsilon}_2 + \frac{2g}{a} \varepsilon_2 = 0 \\ \frac{13}{2} \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \frac{5g}{a} \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

- 4.2. On donne les conditions initiales suivantes au mouvement du système :

$$\varphi_1(t=0) = \varphi_1^0, \dot{\varphi}_1(t=0) = \dot{\varphi}_1^0, \varphi_2(t=0) = \varphi_2^0, \dot{\varphi}_2(t=0) = \dot{\varphi}_2^0$$

Trouver les évolutions de ε₁ et ε₂ en fonction du temps.