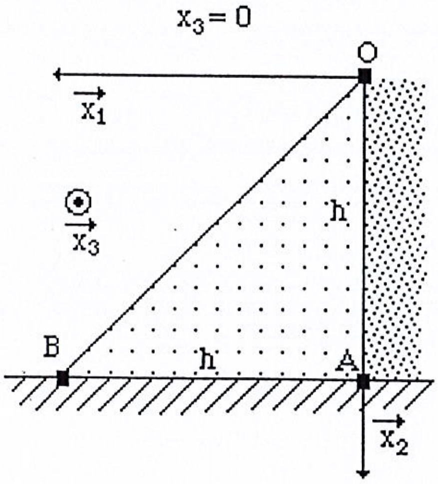
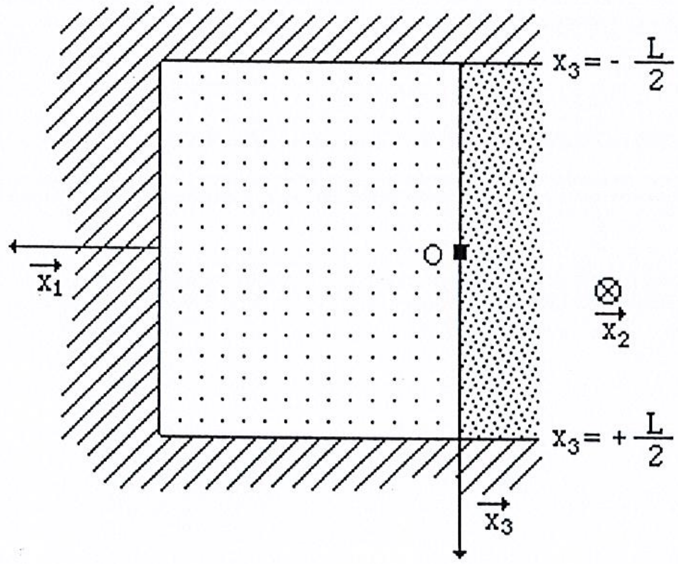
EQUILIBRE STATIQUE D'UN BARRAGE HYDRAULIQUE

Soit un repère cartésien orthonormé $R = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ où $x = (x_i)_{i=1,2,3}$ est la position d'un point M. On considère un massif prismatique Ω, homogène de masse volumique ρ, limité par les plans $x_1 = 0$, $x_1 = x_2$, $x_2 = h$ et $x_3 = \pm L/2$ qui schématise un barrage hydraulique. On suppose que le barrage est en équilibre :

- sous l'action d'une densité volumique d'effort dus à la pesanteur :
$$\rho\vec{f} = \rho g\overrightarrow{x_2}\,;$$
- sous l'action d'efforts de pression appliqués sur la face $x_1 = 0$, représentés par la densité superficielle (p désignant la pression à $x_2 = h$) :
$$\vec{F} = \frac{p}{h}\,x_2\overrightarrow{x_1};$$
- en supposant que la pression de l'air sur la face $x_1 = x_2$ est négligeable;
- en supposant que la face $x_2 = h$ est ancrée dans le sol;
- que le déplacement sur les surfaces $x_3 = \pm L/2$ ne peut être qu'un mouvement de glissement dans le plan (x_1Ox_2) et que seule la composante suivant l'axe (Ox_3) de la densité d'effort sur ces mêmes faces est non nulle.

On suppose que le problème est symétrique par rapport au plan (x_1Ox_2). On suppose que le barrage est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope dont E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et λ et μ les coefficients de Lamé. De plus, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que le problème est symétrique par rapport à l'axe (Ox_1).





FORMULAIRE : matériau homogène isotrope

$$\text{Loi de Hooke : } \varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{Tr}(\sigma)\,I \Leftrightarrow \sigma = \lambda\,\mathrm{Tr}(\varepsilon)\,I + 2\mu\,\varepsilon$$

PARTIE A : équilibre global du barrage

1. Calculer le torseur résultant en O des efforts de pression qui s'exerce sur la face $x_1 = 0$.
2. Calculer le torseur résultant en O des efforts de volume qui s'exerce à l'intérieur du barrage.
3. Calculer le torseur résultant en O des efforts qui s'exerce sur la face $x_2 = h$.

PARTIE B : équilibre local en chaque point du barrage

1. Ecrire les équations du problème. Ce problème rentre-t-il dans le cadre de la formulation générale des problèmes d'élasticité ? Discuter l'unicité de sa solution en contraintes et en déplacements.
2. On suppose que le champ de contraintes en tout point M du barrage à la forme suivante :

$$\sigma\,(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} = a x_1 + b x_2 & \sigma_{12} = a' x_1 + b' x_2 & \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{21} = a' x_1 + b' x_2 & \sigma_{22} = a'' x_1 + b'' x_2 & \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{31} = 0 & \sigma_{32} = 0 & \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}.$$

   A quelles conditions sur les constantes a, b, a', b', a'' et b'', le champ de contraintes donné a - il des chances d'être solution du problème ?
3. Calculer le champ de déformations.
4. Calculer le champ de déplacements. A-t-on trouvé la solution du problème en contrainte et en déplacement ?