DISQUE INHOMOGENE SUR UNE PENTE

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère un système mécanique S en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{i}, \vec{j}\,\vec{k})$.

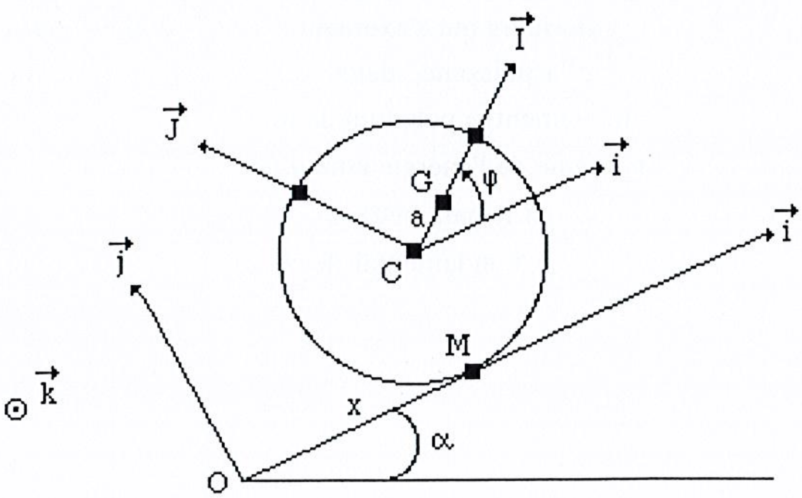
Le système S est un disque rigide inhomogène de rayon r, de centre C et de masse m. On désigne par $R_s = (C, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ un repère orthonormé lié à S dont l'axe $(C, \vec{K})$ est orthogonal au plan de S. On suppose que ce repère est principal d'inertie. Dans ce repère, on désigne par G le centre de masse de S avec :

$$\overrightarrow{CG} = a\vec{I} \; (a \leq \frac{r}{2})$$

et par I_1, I_2, I_3 les moments principaux d'inertie de S en C.

Le disque est en mouvement de roulement sans glissement au contact d'un plan incliné faisant un angle α $(0 \leq \alpha < \pi/2)$ par rapport à l'horizontale. Le plan est défini par les axes $(O, \vec{k}, \vec{i})$, l'axe $(O, \vec{i})$ indique sa pente et le sens ascendant, l'axe $(O, \vec{j})$ indique sa normale. Le mouvement de S est plan de telle sorte qu'à chaque instant $\vec{K} = \vec{k}$ et on pose : $\varphi = (\vec{i}, \vec{I})$. On désigne par M le point géométrique de contact entre S et le plan incliné et on pose : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

Enfin, on suppose l'existence d'un champ de pesanteur uniforme vertical descendant dont g est la constante caractéristique.



1. Cinematique (R sera pris comme repere de projection)

1.1. Donner l'expression des éléments de réduction en C du torseur cinématique de S par rapport à R.

1.2. Ecrire la condition de roulement sans glissement au point de contact.

1.3. En déduire l'expression des éléments de réduction en C et en G du torseur cinématique de S par rapport à R en fonction de :

$$r,\ \varphi,\ \dot{\varphi},\ q = \frac{a}{r}$$

2. Cinetique (R sera pris comme repere de projection)

2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en C du torseur cinétique de S par rapport à R. Ces expressions seront écrites en faisant apparaître :

$$m,\ r,\ \varphi,\ \dot{\varphi},\ q = \frac{a}{r},\ Q = \frac{I_3}{m\ r^2}$$

2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en C du torseur dynamique de S par rapport à R. Ces expressions seront écrites en faisant apparaître les mêmes quantités que pour le torseur cinétique.

2.3. Donner, toujours en fonction des mêmes quantités, l'énergie cinétique de S par rapport à R.

3. Dynamique (R sera pris comme repere de projection)

3.1. Donner la forme et, quand c'est possible, l'expression précise (toujours en fonction des mêmes quantités et de g) des éléments de réduction en C des torseurs des efforts extérieurs qui s'exercent sur le système. Pour chacun d'eux, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont ils dérivent.

3.2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, donner l'équation différentielle (du premier ordre) qui régit le paramètre φ.

3.3. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, retrouver l'équation différentielle précédente.

4. ETUDE DU MOUVEMENT

L'équation du mouvement du paramètre φ est :

$$\dot{\varphi}^2(t)\, f[\varphi(t)] = g[\varphi(t)] + Z \quad \text{avec} \begin{cases} Z = \text{constante} \\ f(\varphi) = 1 + Q + 2\,q\,\sin\varphi \\ g(\varphi) = -\dfrac{2g}{r}\,\{q\,\sin(\alpha + \varphi) - \varphi\,\sin\alpha\} \end{cases}$$

4.1. Compte tenu des hypothèses, montrer que $f(\varphi) > 0$.

4.2. Dans les 4 cas suivants, déterminer le nombre et étudier la stabilité des positions d'équilibre φ_e du mouvement de S :

- cas 1) $\dfrac{\sin\alpha}{q} > 1$
- cas 2) $\dfrac{\sin\alpha}{q} = 1$
- cas 3) $1 > \dfrac{\sin\alpha}{q} > 0$
- cas 4) $\dfrac{\sin\alpha}{q} = 0$

4.3. On se place dans le cas où $\alpha = 0$. Déterminer la période des oscillations de S dans le voisinage de la position d'équilibre stable.