

CONTROLE TERMINAL – SESSSION 1

Durée : 2h 00 min

*Pas de documents, pas de téléphone portable ou montre connectée. Calculatrice autorisée
prenez soin de justifier vos réponses et de respecter les notations employées (cela sera pris en compte dans la notation)*

NOM / Prénom :

Problème : L'optique ondulatoire dans la photographie

23 points

Ce problème volontairement assez long est noté sur 23, ce qui vous laisse la possibilité de ne pas traiter un certain nombre de questions ou d'avoir quelques erreurs.

Partie 1 : Introduction

3 points

chapitres de cours associés : 1 et 6

Dans ce problème, nous allons utiliser un appareil photographique constitué d'un ensemble de lentilles de verre d'indice $n = 1.5$. Cette association peut se caractériser par la focale f' de l'ensemble et par le diamètre D du diaphragme. Nous allons travailler tout au long de ce problème dans les conditions de l'optique paraxiale et considérer que tous les éléments sont parfaits au sens de l'optique géométrique. Nous négligerons les phénomènes de dispersion chromatique ainsi que l'absorption des différents éléments.

Nous allons tout d'abord utiliser cet appareil photo pour imager dans le domaine du visible une scène éclairée par une lumière dite blanche. Si besoin, la valeur de la vitesse de lumière dans le vide est notée c et sera prise égale à 3.10^8 m/s.

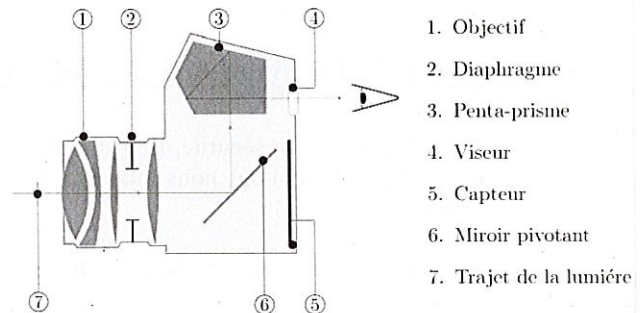


Figure 1 : vue de coupe d'un appareil photo réflex

P1.1) Rappelez les conditions de l'optique paraxiale.

0.25 pt

P1.2) En optique géométrique paraxiale, quelle est l'ouverture numérique ON caractérisant l'angle formé par les rayons les plus éloignés de l'axe optique ?

0.5 pt

$ON =$

P1.3) Quelle est le nom de la fonction qui caractérise la réponse d'un système optique dans le domaine des fréquences spatiales pour une scène éclairée en lumière blanche ?

0.5 pt

P1.4) Soit h la réponse impulsionnelle (ou percussionnelle) cohérente de l'appareil photographique mesurée dans le domaine spatial direct. Comment obtient-t-on, à partir de h , la fonction précédente ?

0.5 pt

P1.5) Quelle est la plage de longueurs d'ondes caractéristique de la lumière visible ?

0.5 pt

$\lambda =$	à	(valeurs numériques)
-------------	---	----------------------

P1.6) Rappelez les équations de Maxwell vérifiées par les champs électromagnétiques dans le cadre des approximations généralement considérées en optique.

0.5 pt

P1.7) Dans le cas de l'optique paraxiale, quelle est l'équation qui donne l'évolution longitudinale du profil spatial transverse de la lumière ? (nom uniquement, l'équation n'est pas demandée)

0.25 pt

Partie 2 : Elimination d'une réflexion parasite sur une vitre :

3 points

chapitre de cours associé : 2 et 7

Pour des raisons de sécurité, l'objet à photographier est situé derrière une vitre de verre, d'indice optique n pris égal à 1.5. Nous allons nous intéresser ici uniquement à la réflexion sur la première face de la vitre de verre (interface air/verre).

P2.1) La réflexion intervenant est-elle diffuse ou spéculaire ? (cochez la bonne réponse)

0.25 pt

<input type="checkbox"/> diffuse	<input type="checkbox"/> spéculaire
----------------------------------	-------------------------------------

P2.2) Donner l'expression des coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude et en incidence normale. Donnez également les coefficient en intensité R et T ainsi que leur valeur numérique.

0.75 pt

$r =$	$t =$
$R =$	$T =$
=	=
(val. num)	(val. num)

Nous allons chercher à réduire au maximum les reflets parasites introduits par cette vitre (éblouissement dû à l'éclairage, appareil photo ou photographe visibles). Pour cela, l'éclairage et l'appareil photos sont décalés angulairement symétriquement de part et d'autre de la normale à la vitre, suivant le schéma vu de haut ci-dessous où θ_i représente l'angle formé par les rayons lumineux incidents et la normale à la vitre.

Les coefficients de réflexion et transmission pour les ondes TE et TM sont donnés par les relations suivantes avec θ_i l'angle de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{TE} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ r_{TM} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{TE} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{TM} = \frac{2 \sin(\theta_i) \cos(\theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{array} \right.$$

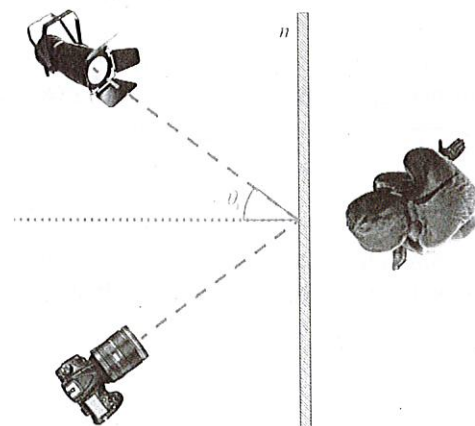


Figure 2 : vue de haut de la scène photographiée

P2.3) Comment se nomment ces équations ?

0.25 pt

On se place à l'angle dit de Brewster θ_B .

P2.4) Rappelez l'expression de cet angle et donnez sa valeur numérique.

0.75 pt

$\theta_B =$	(expression littérale) =	(val num en degrés)
--------------	--------------------------	---------------------

P2.5) Quelle est la polarisation après réflexion sur la surface vitreuse à l'angle de Brewster si initialement la lumière éclairant la scène n'est pas polarisée ?

0.25 pt

P2.6) En déduire le composant à installer devant l'objectif de l'appareil photo pour éliminer les réflexions parasites ? Quelle doit être son orientation pour éliminer totalement ces réflexions ?

0.5 pt

P2.7) Quelle est la nature de la polarisation de la lumière transmise par la vitre ?

0.25 pt

Partie 3 : Traitement anti-réfléchissant des optiques

4 points

chapitre de cours associé : 2

Les réflexions parasites n'interviennent pas uniquement au niveau de la vitre. En effet, l'appareil photo est composé de nombreux éléments optiques en verre (cf Fig. 1), conduisant à une intensité transmise pouvant être réduite en raison des réflexions à chaque interface. Pour limiter ces réflexions, un traitement anti-reflet à base de couches minces va être appliqué sur chacune des faces.

On considère tout d'abord une couche mince d'indice n_C sur le substrat de verre d'indice n , le milieu incident étant de l'air. On rappelle que les champs électromagnétique et magnétique au niveau de l'interface air-couche mince (interface I) peuvent être exprimés à partir des champs au niveau de l'interface couche-mince / verre (interface II) grâce à une matrice M :

$$\begin{pmatrix} E_I \\ H_I \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{pmatrix}$$

dont les éléments sont

$$M = \begin{pmatrix} \cos(k_0 h) & -i \sin(k_0 h) / Y_C \\ -i \sin(k_0 h) Y_C & \cos(k_0 h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

avec $k_0 = 2\pi / \lambda$, h la différence de marche optique entre les deux interfaces considérées et Y_C caractéristique de la couche mince donnée pour la situation étudiée par :

$$Y_C = Y_0 n_C \cos(\theta),$$

avec Y_0 la valeur caractéristique du vide et θ l'angle du faisceau par rapport à la normale dans le milieu.

P3.1) Quel est le nom de la caractéristique Y mentionnée ci-dessus ?

0.25 pt

P3.2) On considère une couche mince quart d'onde à 532 nm avec une **incidence normale**. Comment alors se simplifie la matrice M ?

0.75 pt

$$M =$$

P3.3) Pourquoi en optique, on optimise souvent les traitements autour de la couleur verte ?

0.25 pt

Le coefficient de réflexion de l'empilement est donné par :

$$r = \frac{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_S m_{12} - m_{21} - Y_S m_{22}}{Y_0 m_{11} + Y_0 Y_S m_{12} + m_{21} + Y_S m_{22}}$$

avec m_{ij} les valeurs de M et Y_S la caractéristique du substrat de verre d'indice n .

P3.4) Exprimez r , en fonction des indices optiques impliqués n et n_C (on reste en incidence normale)

0.75 pt

$$r =$$

P3.5) Quelle condition portant sur l'indice n_C doit être respectée pour que le traitement soit anti-reflet ?

0.5 pt

$$n_C =$$

En fait, une seule couche ne s'avère pas forcément suffisante et il est difficile de trouver un matériaux dont l'indice vérifie les propriétés précédentes. On associe donc deux couches minces d'indice n_1 et n_2 pour la première et la seconde couche respectivement. A ces couches, on associe les matrices M_1 et M_2 .

P3.6) Quelle est la matrice M_{12} de l'ensemble des deux couches ?

0.75 pt

$$M_{12} =$$

P3.7) Quelle est la condition à vérifier sur le rapport n_2/n_1 ?

0.75 pt

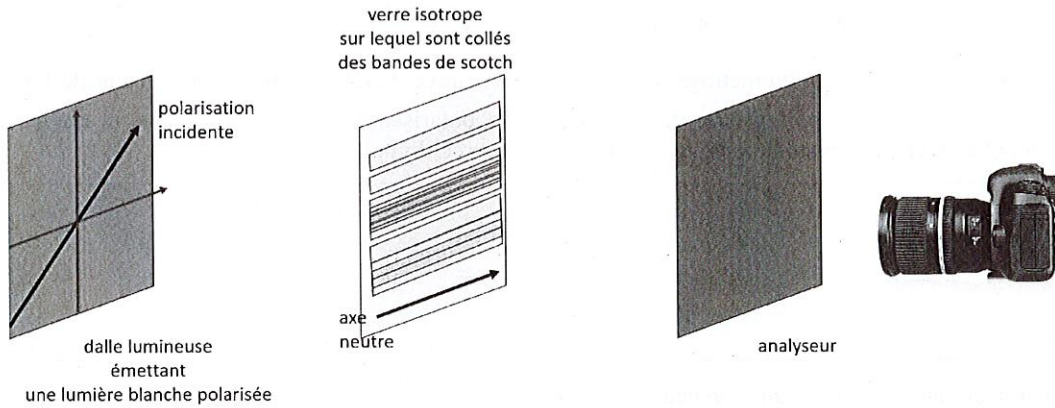
$$n_2/n_1 =$$

Partie 4 : Couleurs interférentielles obtenues par polarisation

5.5 points

chapitre de cours associé : 7

Le photographe désire maintenant explorer les couleurs qui peuvent être obtenues à partir de la polarisation. Pour cela, il assemble sur une plaque transparente de verre isotrope des morceaux d'adhésif. Il constate que suivant le nombre de couches superposées, la couleur varie. Dans ses premiers essais, pour se simplifier la vie, il superpose toujours dans la même direction les morceaux de scotch. Le montage qu'il a mis en place est le suivant :



Les morceaux de scotch se comportent comme un milieu biréfringent transparent que l'on supposera uniaxe positif et dont l'axe rapide est horizontal ($\alpha = 0$). Plus précisément, pour le Scotch™ Storage & Packaging tape ¹, l'indice ordinaire n_o est identique au verre (1.500) et la biréfringence Δn est de 0.014. L'épaisseur physique de l'adhésif est $e = 40 \mu\text{m}$.

Cet objet est éclairé en incidence normale par une lumière blanche polarisée à 45° des axes neutres des bandes adhésives. Un analyseur est placé devant l'objectif.

P4.1) Quelle est la valeur de l'indice extraordinaire n_e ?

0.25 pt

$n_e =$ _____

P4.2) Quelle doit être l'orientation de l'analyseur par rapport au polariseur si l'on désire observer les morceaux de scotch sur fond lumineux ? Même question on désire avoir un fond noir.

0.5 pt

P4.3) Pourquoi cherche-t-on à placer la polarisation incidente à 45° des axes neutres du milieu biréfringent ?

0.25 pt

P4.4) La plaque de verre a-t-elle un impact? (justifiez)

0.25 pt

OUI NON

¹ Données extraites de Aaron D. Slepkov, "Quantitative measurement of birefringence in transparent films across the visible spectrum", American Journal of Physics 90, 625-634 (2022), téléchargeable sur <https://arxiv.org/abs/2206.06983>

P4.5) L'analyseur est-il indispensable ? (justifiez)

0.25 pt

OUI

NON

Pour modéliser les observations, nous allons utiliser le formalisme de Jones.

P4.6) On considère une polarisation rectiligne de la lumière en entrée de fibre. Exprimez le vecteur de Jones \vec{J}_θ qui peut être associé à cette polarisation dans le cas où la polarisation de la lumière fait un angle θ avec l'horizontale. Que devient ce résultat lorsque la polarisation est rectiligne à 45 ? 0.5 pt

$$\vec{J}_\theta =$$

$$\vec{J}_{45^\circ} =$$

On considère maintenant l'effet d'un morceau d'adhésif.

P4.7) Quel est le déphasage introduit $\Delta\varphi$ par cet élément biréfringent entre ses deux axes neutres ? 0.5 pt

$$\Delta\varphi = \quad (\text{expression}) \quad = \quad (\text{valeur numérique à } \lambda = 532 \text{ nm})$$

Nous rappelons l'expression générale de la matrice de Jones caractéristique d'une lame de phase constituée d'un matériau anisotrope uniaxe dont l'orientation de l'axe rapide fait un angle α avec l'horizontale et dont le déphasage introduit est $\Delta\varphi$:

$$M_J = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + e^{-i\Delta\varphi} \sin^2 \alpha & (1 - e^{-i\Delta\varphi}) \cos \alpha \sin \alpha \\ (1 - e^{-i\Delta\varphi}) \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + e^{-i\Delta\varphi} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$$

P4.8) Comment se simplifie cette matrice dans le cas que nous considérons ici ? 0.5 pt

$$M_J =$$

P4.9) Quel est l'état de polarisation après le morceau d'adhésif ?

0.5 pt

$$\vec{J}' =$$

Nous allons travailler ici de manière à mener des observations sur fond noir (on utilise donc l'orientation correspondante trouvée à la question P4.2). Nous rappelons l'expression générale de la matrice de Jones caractéristique d'un polariseur orienté avec un angle θ par rapport à l'horizontale.

$$M_{J\theta} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

P4.10) En déduire l'état de polarisation après le polariseur.

0.5 pt

$\vec{J}' =$

P4.11) Exprimez l'intensité obtenue en fonction de la longueur d'onde.

0.5 pt

$I(\lambda) =$

P4.12) Pour quelles longueurs d'onde du visible obtient on une extinction pour une couche seule ?

0.5 pt

P4.13) Quand on augmente le nombre de couches d'adhésif, comment varie l'intervalle spectral libre du spectre cannelé ? (justifiez)

0.25 pt

P4.14) Comment s'appelle l'échelle prédisant les couleurs obtenues ?

0.25 pt

Partie 5 : Influence d'un éclairage par un laser

3.5 points

chapitre de cours associé : 1, 6, 8

On remplace maintenant l'éclairage de lumière blanche polarisée par un laser émettant à la longueur d'onde λ_0 de 532 nm. On supposera en première approximation que le faisceau laser émis est une onde plane.

P5.1) Donnez la fréquence ν_0 de la lumière émise par le laser vert.

0.5 pt

$\nu_0 =$	(expression analytique) =	(valeur numérique)
-----------	---------------------------	--------------------

P5.2) En fait, ce laser est basé sur un processus de doublage de fréquence : un premier laser de longueur d'onde λ_1 pompe un cristal non-linéaire qui émet le rayonnement vert à une fréquence double de la fréquence du rayonnement de ce premier laser. Quelle est la longueur d'onde λ_1 et dans quelle gamme spectrale se situe-t-elle ?

0.5 pt

$\lambda_1 =$	(valeur numérique)			
<input type="checkbox"/> Visible	<input type="checkbox"/> Infrarouge	<input type="checkbox"/> UV	<input type="checkbox"/> Rayons X	<input type="checkbox"/> THz

P5.3) Donner l'expression de la fonction de transmission $t(r)$ correspondant à l'optique en fonction de λ , f' et D . On notera $\text{circ}(r)$ la fonction correspondant à un disque de rayon 1.

0.5 pt

$t(r) =$

P5.4) Comment s'appelle la tache caractéristique qui est obtenue au point de focalisation de l'objectif ? Doit-t-on l'assimiler à une aberration géométrique ? Quelle fonction mathématique particulière cette tache fait-elle intervenir ?

0.75 pt

<i>La forme caractéristique obtenue au point de focalisation est appelée</i>
<i>Elle est assimilable à une aberration géométrique :</i> <input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON
<i>La fonction mathématique particulière intervenant dans sa définition est :</i>

P5.5) La fonction caractéristique évoquée dans la question P1.3) reste-t-elle toujours valable ? Pourquoi ?

0.5 pt

--

P5.6) Donnez l'expression analytique du diamètre d_f caractéristique de la tache évoquée en P5.4) en fonction de λ , D et f'

0.5 pt

$d_f =$

P5.7) Si on reprend le problème évoqué dans la partie 4, comment vont désormais apparaître les superpositions des morceaux de scotch ?

0.25 pt

--

Partie 6 : Imagerie d'un dispositif diffractant

4 points

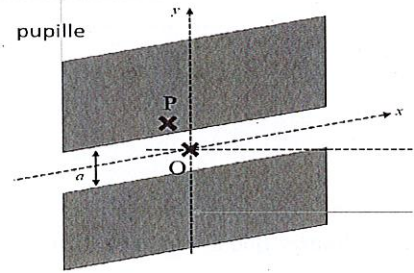
chapitres de cours associé : 5,6

Au final, le photographe souhaite imager un dispositif diffractant de petite taille, comme décrit sur le schéma ci-dessous. Il règle son appareil pour une mise au point à l'infini si bien que l'image enregistrée correspond à l'image obtenue dans le plan focal objet. La source lumineuse reste inchangée par rapport à la partie 5 (i.e. un laser de longueur d'onde 532 nm). La taille de l'objet diffractant est très faible devant D si bien qu'il est possible de négliger l'impact de l'appareil photographique sur la qualité de la photo. Nous considérons donc que le résultat observé est uniquement lié à l'objet diffractant.

P6.1) Quel est le régime de diffraction ici considéré ?

0.25 pt

Le premier objet diffractant étudié est une fente de largeur a infiniment longue et parallèle à l'axe Ox.



P6.2) Exprimez la fonction de transparence pupillaire t_l associée à cette fente en utilisant la fonction porte. 0.25 pt

$$t_l(x,y) =$$

P6.3) Dans le cas général, considérons une ouverture de transparence pupillaire $t(x,y)$ illuminée par une onde plane. Quelle est l'expression générale de l'intensité diffractée $I(x',y')$ observée dans le plan focal d'un instrument de focale f' ? (le résultat sera donné à un coefficient multiplicateur près). On pourra noter T la transformée de Fourier de t . 0.5 pt

$$I(x',y') =$$

P6.4) En déduire la figure de diffraction $I_l(k_x, k_y)$ associée à la fente considérée $t_l(x,y)$.

0.5 pt

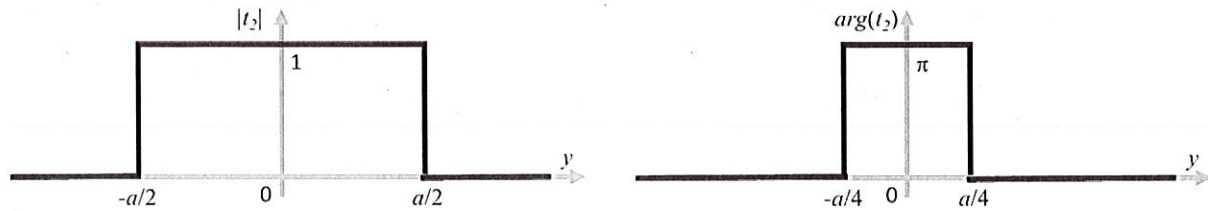
P6.5) En déduire la position des minima k_{min} et la largeur typique Δk de la figure associée.

0.5 pt

$$k_{min} =$$

$$\Delta k =$$

Un deuxième objet diffractant est superposé. Il s'agit d'une lame de phase demi-onde de largeur $a/2$ infiniment longue et parallèle à l'axe Ox. Elle est centrée sur la précédente ouverture si bien que la fonction de transfert résultante $t_2(x,y)$ est donnée par la figure suivante.



P6.6) Exprimez la fonction de transparence pupillaire t_2 associée à cette fente en utilisant des fonctions porte Π . 0.25 pt

$$t_2(x,y) =$$

P6.7) Montrez que la figure de diffraction est donnée par : 1.5 pt

$$I(k_x, k_y) \propto 4 a^2 \left[\text{sinc} \left(\frac{k_y a}{4} \right) \right]^2 \left[\sin \left(\frac{k_y a}{8} \right) \right]^4$$

On rappelle : $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$; $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2(\theta/2)$; $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin((a+b)/2) \sin((a-b)/2)$

P6.8) Que peut-t-on dire de l'intensité au centre de la figure de diffraction ? 0.25 pt