

1) Répondre aux questions suivantes:

- Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire? et de l'équation de Schrödinger dépendante du temps? Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations?
- Quelle est l'interprétation physique de l'opérateur Hamiltonien?
- Pourquoi impose-t-on  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = 1$  ?
- Expliquer le principe d'exclusion de Pauli.
- Quelle est la relation entre les raies spectrales d'un atome d'hydrogène et les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondant ?
- Citer un aspect de type corpusculaire et un de type ondulatoire dans le comportement d'un électron.

2) La relation d'incertitude de Heisenberg pour deux observables  $A$  et  $B$  quelconques mesurés dans un système quantique qui se trouve dans un état  $\psi$  s'écrit

$$\Delta_{\psi}A \Delta_{\psi}B \geq \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\psi}.$$

- Donner l'interprétation physique des grandeurs  $\Delta_{\psi}A$  et  $\Delta_{\psi}B$ , et leurs définitions théoriques précises.
- Comment est-ce qu'on les détermine dans une expérience ?
- Appliquer cette relation générale à la mesure des composantes  $A = L_1$  et  $B = L_2$  du moment cinétique d'un électron, si l'état  $\psi$  est un état propre de la composante  $L_3$  du moment cinétique et de  $\vec{L}^2$ .
- Déterminer  $\Delta_{\psi}L_3$  si l'état  $\psi$  est un état propre de la composante  $L_3$  du moment cinétique et de  $\vec{L}^2$ .
- Ecrire la relation d'incertitude de Heisenberg pour la mesure de la position et de l'impulsion d'un électron.

3) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Après le changement de variables  $\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ ,  $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$  l'Hamiltonien s'écrit  $H = \hbar\omega\bar{H}$ ,  $\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$ .

On définit les opérateurs  $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$  et  $N := a^{\dagger}a$ .

- Déterminer les relations de commutation  $[\bar{x}, \bar{p}]$ ,  $[a, a^{\dagger}]$ ,  $[N, a]$ ,  $[N, a^{\dagger}]$ .
- Montrer que les valeurs propres de  $H$  ne peuvent pas être négatives.
- Exprimer  $H$  en fonction de  $a$  et  $a^{\dagger}$ .
- Montrer que si  $\varphi$  est une fonction propre de  $H$  avec valeur propre  $E_n$ , alors  $a^{\dagger}\varphi$  est aussi une fonction propre. Quelle est la valeur propre correspondante ?
- Si  $\varphi$  est une fonction propre de  $H$  avec valeur propre  $E_n$ , sous quelle condition est-ce que  $a\varphi$  est aussi une fonction propre ? Quelle est la valeur propre correspondante ?
- Déterminer la fonction propre de l'état fondamental. Quelle est son énergie ?