

- 1) Répondre aux questions suivantes:
- Formuler l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.
  - Préciser les notions d'état et d'observable, et leur relation avec une mesure dans une expérience. Donner un exemple.
  - Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire ? et de l'équation de Schrödinger dépendante du temps ? Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations ?
  - Quelle est l'interprétation physique de l'opérateur impulsion ?
  - Formuler les relations d'incertitude de Heisenberg et préciser leur signification. Donner des exemples.
  - Citer un aspect de type corpusculaire et un aspect de type ondulatoire dans le comportement d'un électron.

- 2) On considère une particule libre dont l'état est donné par la fonction d'onde

$$\psi(x) = \nu \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right)$$

où  $p_0, x_0$  sont des paramètres réels.

- Déterminer la distribution de probabilité de la coordonnée  $x$ . Déterminer la constante de normalisation  $\nu$ .
- Déterminer les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion de la particule.
- Déterminer la valeur moyenne de l'énergie cinétique.
- Déterminer les écarts types de la position et de l'impulsion de la particule.
- Analyser ces résultats en termes de la relation d'incertitude.

Indications :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x_0) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}(x_0^2 + a^2/2).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x_0)^2 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right) = a\sqrt{\pi}a^2/2.$$

- 3) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Après le changement de variables  $\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ ,  $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$  l'Hamiltonien s'écrit  $H = \hbar\omega\bar{H}$ ,  $\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$ .

On définit les opérateurs  $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$  et  $N := a^\dagger a$ .

- Déterminer les relations de commutation  $[\bar{x}, \bar{p}]$ ,  $[a, a^\dagger]$ ,  $[N, a]$ ,  $[N, a^\dagger]$ .
- Montrer que les valeurs propres de  $H$  ne peuvent pas être négatives.
- Exprimer  $H$  en fonction de  $a$  et  $a^\dagger$ .
- Montrer que si  $\varphi$  est une fonction propre de  $H$  avec valeur propre  $E_n$ , alors  $a^\dagger\varphi$  est aussi une fonction propre. Quelle est la valeur propre correspondante ?
- Si  $\varphi$  est une fonction propre de  $H$  avec valeur propre  $E_n$ , sous quelle condition est-ce que  $a\varphi$  est aussi une fonction propre ? Quelle est la valeur propre correspondante ?
- Déterminer la fonction propre de l'état fondamental. Quelle est son énergie ? (g) Déterminer les valeurs propres de  $H$ .
- Ecrire les deux fonctions propres  $\varphi_n$  de plus basses énergies, explicitement comme des fonctions de la variable  $x$ .