2. Quelles sont pour un Hamiltonien quelconque les équations de Schrödinger vérifiées par le ket $|\psi\rangle$, la fonction d'onde du système, et le bra associé $\langle\psi|$.
3. En déduire le théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[A,H]|\psi\rangle,$$

où A est une observable quelconque indépendante du temps.
4. Montrer la relation suivante :

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z.$$

5. Montrer que les valeurs moyennes des composantes de l'opérateur de spin $\vec{S}$ vérifient :

$$\begin{cases} \langle\dot{S}_x\rangle = -\omega\langle S_y\rangle \\ \langle\dot{S}_y\rangle = \omega\langle S_x\rangle \\ \langle\dot{S}_z\rangle = 0 \end{cases}$$

6. Déterminer l'évolution dans le temps des 3 composantes $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ et $\langle S_z\rangle$. La condition initiale à $t=0$ est donnée par :

$$\langle\vec{S}\rangle(0) = (S_{x0}, S_{y0}, S_{z0}).$$

7. Montrer que le mouvement de $\langle\vec{S}\rangle$ est un mouvement de précession autour de l'axe z. Quel est le temps nécessaire T_0 pour que le spin fasse un tour ? On dessinera schématiquement la trajectoire suivie par $\langle\vec{S}\rangle$.
8. Montrer que le moment cinétique classique $\vec{J}$ associé à un moment magnétique classique $\vec{\mu}$ a le même mouvement de précession. On utilisera pour cela le théorème du moment cinétique. On rappelle également que $\vec{\mu} = \gamma\vec{J}$. Quelle est la période classique d'oscillation ?
9. On décompose $|\psi(t)\rangle$ sur la base propre $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de S_z :

$$|\psi(t)\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle.$$

Quelle est l'évolution temporelle des coefficients c_+ et c_- ?
10. Comparer la valeur du vecteur d'état au bout d'une période T_0, $|\psi(T_0)\rangle$, et la valeur initiale $|\psi(0)\rangle$.
11. Envisager une mise en évidence expérimentale de ce résultat.

Université de Bourgogne
Licence 3 de physique
CT Mécanique quantique 2022-2023

Probléme I : (5 points)
On considère l'Hamiltonien H donné par $H = H_0 + \epsilon H'$ où

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} ; \; H' = \begin{pmatrix} 0 & ia \\ -ia & 0 \end{pmatrix}$$

avec E_1, E_2, ϵ et a des paramètres réels, $E_2 > E_1$.

1 1. Déterminer de manière exacte les valeurs propres de H.

1 2. Développer en série de Taylor ces valeurs propres à l'ordre 2 par rapport au paramètre ϵ supposé petit.

2 3. En utilisant la théorie des perturbations stationnaire, déterminer les corrections à l'ordre 1 et 2 des valeurs propres de H_0 dues à la perturbation H'.

1 4. Comparer les résultats des questions 2 et 3. Ce résultat était-il attendu ?

Probléme II : (5 points)
On considère une particule dans un triple puits de potentiel. On désigne par $|i\rangle$ ($i = 1, 2$ ou 3) l'état de la particule lorsqu'elle se trouve dans le puits numéro i et on suppose que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. On introduit dans le système un processus qui permet à la particule de passer d'un puits à l'autre par effet tunnel, avec une amplitude $T > 0$, ce qui conduit à l'Hamiltonien :

$$H = T(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$$

1 1. Démontrer que l'opérateur permutation P défini par

$$P|1\rangle = |2\rangle, \; P|2\rangle = |3\rangle, \; P|3\rangle = |1\rangle$$

commute avec H.

1 2. Calculer P^3. En déduire les valeurs propres de P. Ces valeurs propres sont-elles réelles ? Ce résultat était-il attendu ?

2 3. Déterminer les vecteurs propres associés.

1 4. En déduire les valeurs propres de H et leur dégénérescence.

Probléme III : (10 points)
On considère une particule de spin S plongée dans un champ magnétique homogène et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On note $\vec{S}$ l'opérateur de spin de la particule et $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ l'opérateur moment magnétique associé. On rappelle que l'opérateur de spin est donné en fonction des matrices de Pauli par $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. On pose $\omega = -\gamma B$.

1. Ecrire l'Hamiltonian H du problème