Licence de Mathématiques

2022-2023
Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités
Année : L3
Date : 21 juin 2023

Examen : Session 2

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.

▷ **1)** Montrer que (X_n) converge en loi. Vers quelle limite ?

▷ **2)** Montrer que (X_n) converge en probabilités.

▷ **3)** Montrer que (X_n) ne converge pas presque-sûrement.

Exercice 2 : Un véhicule possède trois moteurs. Il ne peut avancer que si deux qu moins des moteurs fonctionnent. La probabilité que le premier moteur fonctionne est p_1 ; celle que le deuxième fonctionne est p_2, et celle que le troisième fonctionne est p_3. Quelle est la probabilité que le véhicule puisse avancer ? (on supposera que chaque moteur est indépendant des autres).

Exercice 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires positives, suivant toutes la même loi et intégrables ; elles ne sont pas supposées indépendantes. On note $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

▷ **1)** Montrer que pour tout réel x,

$$g_n(x) := \frac{1}{n}\mathbb{P}(M_n \geq x) \leq \mathbb{P}(X_1 \geq x).$$

▷ **2)** Montrer que pour une variable aléatoire réelle Y on a

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq y)dy.$$

▷ **3)** Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} g_n(x) = 0.$$

▷ **4)** En déduire que $\mathbb{E}(M_n)/n \to 0$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 : Soit $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que Z admet une densité f définie par

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}} \mathbb{1}_{\{x \geq |y|\}},$$

où σ est un paramètre strictement positif.

▷ **1)** Vérifier que f est bien une densité.

▷ **2)** Calculer la loi de X.

▷ **3)** Caculer la loi de Y.

▷ **4)** Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

▷ **5)** Calculer la loi de $(X-Y, X+Y)$.

▷ **6)** Montrer que $X-Y$ et $X+Y$ sont indépendantes.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2/2}dx.$$

Exercice 6 (*) : Une grenouille effectue des sauts (toujours vers l'avant) de longueur comprise entre 0 et 1 mètre, avec une répartition sur $[0,1]$. On suppose que la longueur d'un saut suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

▷ **1)** Calculer la distance moyenne parcourue en deux sauts.

▷ **2)** Calculer le nombre moyen de sauts nécessaires pour que la grenouille atteigne ou dépasse 1 mètre.

▷ **3)** Commenter.