Licence de Mathématiques

2022-2023

Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités

Année : L3

Date : 17 Mai 2023

Examen

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

▷ **1)** Calculer la densité de (U,V).

▷ **2)** Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

Exercice 2 : Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. On définit la variable aléatoire U par $U = X+Y$.

▷ **1)** Calculer la fonction caractéristique de X.

▷ **2)** Calculer la fonction caractéristique de U.

▷ **3)** Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Z de densité $f : z \mapsto ze^{-z}\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(z)$.

▷ **4)** Quelle est la loi de U ?

Exercice 3 : Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

▷ **1)** Montrer que la suite (S_n/n) définie par $S_n = \sum_{i=1}^n \ln U_i$ converge presque sûrement et donner sa limite.

▷ **2)** Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $X_n = \left(\prod_{i=1}^n U_i\right)^{\frac{\alpha}{n}}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$?

▷ **3)** Montrer que la suite de terme général $Z_n = e^{\alpha\sqrt{n}}\left(\prod_{i=1}^n U_i\right)^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,\theta]$ et on note $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$.

▷ **1)** Montrer que $n(\theta - M_n)$ converge en loi et préciser la limite.

▷ **2)** Montrer que $\theta - M_n$ converge en probabilité vers 0.

▷ **3)** Montrer que M_n converge presque sûrement vers θ.

Problème 1 : Soit X une variable aléatoire ayant pour densité

$$f : x \mapsto f(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

▷ **1)** Justifier que f définit bien une densité.

▷ **2)** Calculer la fonction de répartition F_X de X.

▷ **3)** Calculer $\mathbb{E}[X]$.

▷ **4)** On définit $Y = 1 - e^{-X}$. Calculer la densité de Y.

▷ **5)** Calculer l'espérance et la variance de Y.

▷ **6)** Calculer la fonction de répartition F_Y de Y.

▷ **7)** Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{et} \quad M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

(a) Que peut-on dire de la suite (S_n/n) ?

(b) Pour $0 < \delta < 1$, calculer $\mathbb{P}(M_n \leq 1 - \delta)$, et donner la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$.

(c) Que dire de $\mathbb{P}(M_n \geq 1 + \delta)$? En déduire que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité et donner sa limite.

Problème 2 : Un vaisseau spatial traverse un champ d'astéroïdes, et passe à proximité d'un nombre aléatoire d'entre eux. On notera N ce nombre aléatoire. Il heurte chacun de ces astéroïdes avec une probabilité $p \in [0, 1]$, indépendamment les uns des autres. On cherche la loi du nombre d'astéroïdes heurtés. On supposera que le nombre N suit la loi de Poisson de paramètre et est indépendant du fait que chaque astéroïde heurte le vaisseau ou non. Pour modéliser ce problème, on considère ainsi une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, et soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On considère les variables aléatoires

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \text{pour n } \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad Z = S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

▷ **1)** Calculer la fonction génératrice $G_{X_1}(s) = \mathbb{E}[s^{X_1}]$ de X_1 .

▷ **2)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la fonction génératrice de S_n. En déduire la loi de S_n.

▷ **3)** On considère la fonction génératrice $G_Z(s) = \mathbb{E}[s^Z]$ de Z.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [-1, 1]$, $\mathbb{E}[s^Z | N = n] = G_{S_n}(s)$.

(b) En déduire $G_Z(s)$ pour $s \in [-1, 1]$.

(c) En déduire la loi de Z.

(d) Quelle est la probabilité que le vaisseau sorte indemne du champ d'astéroïdes ?