Université de Bourgogne | Année 2022-2023
Topologie des espaces métriques | 3 janvier

---

**Contrôle terminal – 3h**

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

---

Dans tout le sujet, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sera muni de sa distance usuelle et $(E, d)$ et $(F, d')$ seront deux espaces métriques non-vides.

**Exercice 1.**
On considère l'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$. Pour chacune des affirmations suivantes, la montrer si elle est vraie et montrer sa négation si elle est fausse.
**1)** $\mathbb{Z}$ est complet. **2)** $\mathbb{Z}$ est compact. **3)** $\mathbb{Z}$ est connexe.

**Exercice 2.**
Pour chacune des affirmations suivantes, en donner une preuve complète et détaillée si elle est vraie quel que soit l'espace métrique $(E, d)$ et donner un contre-exemple explicite si elle est fausse.
**1)** Soit $f\colon E \to E$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

**a)** $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in E$, $d(x, y) \leq \eta$ implique $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

**b)** Pour tout ouvert $V$ de $E$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $E$.

**2)** Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

**a)** $\exists x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \epsilon$.

**b)** $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in E$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) \leq \epsilon$.

**Exercice 3.**
Soit $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de la distance $d_\infty$ de la convergence uniforme : si $g_1, g_2 \in X$ alors

$$d_\infty(g_1, g_2) = \sup_{x\in[0,1]} |g_1(x) - g_2(x)|.$$

Soit $h\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ une application uniformément continue. On considère les deux applications suivantes de $X$ dans $X$ définies par

$$\phi\colon f \mapsto f \circ h \quad \text{et} \quad \psi\colon f \mapsto h \circ f.$$

Pour être précis, dans le cas de $\phi$, on considère la restriction de $f \circ h$ à $[0, 1]$. On admet que les applications $\phi$ et $\psi$ sont bien définies.
**1)** Montrer que $\phi$ est une application continue.
**2)** Montrer que $\psi$ est une application continue.

**Exercice 4.**
**1)** Soit $f\colon E \to F$ une application localement constante, c'est-à-dire que pour tout $x$ dans $E$ il existe $r > 0$ tel que $f$ soit constante sur $B(x, r)$. Montrer que si $(E, d)$ est connexe alors $f$ est constante.
**2)** Soit $g\colon E \to \mathbb{R}$ une application localement bornée, c'est-à-dire que pour tout $x$ dans $E$ il existe $r > 0$ et $M > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, r)$, $|g(y)| \leq M$. Montrer que si $(E, d)$ est compact alors $g$ est bornée.

**Exercice 5.**
Soit $f\colon E \to F$ une application continue. On dit que $f$ est *fermée* si l'image par $f$ d'un fermé de $E$ est un fermé de $F$. Par ailleurs, on dit que $f$ est *propre* si l'image réciproque par $f$ d'un compact de $F$ est un compact de $E$.
**1)** Montrer que si $E$ est compact alors $f$ est propre.
**2)** Montrer que si $f$ est propre alors $f$ est fermé.