Université de Bourgogne Année 2022-2023
Topologie des espaces métriques 19 juin

Rattrapage – 3h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.
Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ sera muni de sa distance usuelle et (E, d) et (F, d') seront deux espaces métriques non-vides.

Exercice 1.
Soit A et B deux sous-ensembles de E. Pour chacune des inclusions ci-dessous, montrer celles qui sont vraies quel que soient les choix de (E, d), A et B. Donner un contre-exemple aux autres.

$$\textbf{a) } \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \textbf{b) } \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}, \quad \textbf{c) } \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \widehat{A \cup B}^{\circ}, \quad \textbf{d) } \widehat{A \cup B}^{\circ} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

Exercice 2.
Soit $f \colon E \to F$ une application continue. Soit $A \subset E$.
1) Montrer que si A est connexe alors $f(A)$ est connexe.
2) Montrer que si A est compact alors $f(A)$ est compact.

Exercice 3.
Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\exists M_x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{tel que} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \; |x_k| \leq M_x.$$

Pour tous $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^∞, on pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \quad \text{et} \quad d(x, y) = \|x - y\|_\infty.$$

Pour la suite, on admet que ℓ^∞ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.
1) Pour chaque $k \geq 1$, on définit $u(k) := (u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_k(k) = 1 + 1/k$ et $u_n(k) = 0$ si $n \neq k$. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence dans (ℓ^∞, d) de la suite $(u(k))_{k\geq 1}$.

On considère maintenant l'ensemble c_0 qui est par définition l'ensemble des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |x_n| < \epsilon. \tag{1}$$

2) En partant de la définition (1), montrer que c_0 est inclus dans ℓ^∞.
3) Pour chacune des assertions suivantes, montrer celles qui sont vraies et montrer la négation de celles qui sont fausses.

a) c_0 est un ouvert de (ℓ^∞, d) **b)** c_0 est un fermé de (ℓ^∞, d)
c) c_0 est un connexe de (ℓ^∞, d) **d)** c_0 est un compact de (ℓ^∞, d)

Exercice 4.
Soit A un sous-ensemble fermé non-vide de (E, d). Pour chaque $a \in E$, on pose $d(a, A) := \inf_{b\in A} d(a, b)$.
1) Montrer que si a et b sont des éléments de E alors $|d(a, A) - d(b, A)| \leq d(a, b)$.
2) A-t-on forcément que si $a \in E$ vérifie $d(a, A) = 0$ alors il existe $b \in A$ tel que $d(a, b) = 0$? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre-exemple.
3) A-t-on forcément que si $a \in E$ vérifie $d(a, A) = 1$ alors il existe $b \in A$ tel que $d(a, b) = 1$? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre-exemple.