Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année 2023-2024
11 janvier 2024

L3-Algèbre 1
Examen
Durée : 3 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Les anneaux dans cet examen sont supposés unitaires et commutatifs.

Soit A un anneau, et soit $I \subsetneq A$ un idéal de A tel que $I \neq A$. Vous pouvez utiliser sans démonstration qu'il existe au moins un idéal maximal qui contient I.

Exercice (1) (6 points) (Questions de cours)

(a) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
(b) Donner la définition d'un anneau factoriel. Donner un exemple d'un anneau intègre qui n'est pas factoriel.
(c) VRAI ou FAUX ? Indiquer, pour chaque assertion suivante, si elle est VRAIE ou FAUSSE (sans justification) :
 (i) Chaque sous-anneau d'un anneau factoriel est factoriel.
 (ii) Si A est un anneau et I est un idéal premier, alors A/I est un corps.
 (iii) Soit A un anneau intègre, et $P \in A[X]$. Alors $\alpha \in A$ est une racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.
 (iv) Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 4. Alors P est irréductible si et seulement si P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

Exercice (2) (3 points) On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[X]$.

(a) A est-il factoriel ?
(b) Pour chacun des idéaux suivant, décider s'il est principal. Est-il maximal ? Est-il premier ?
 (i) $I_1 = (X - 1, X^3 + 2)$;
 (ii) $I_2 = (X - 1, X^2 + 3)$;
 (iii) $I_3 = (X^2 - 1, X^2 - X)$.

Exercice (3) (5 points) Soit $\mathbb{F}$ égal au corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, un corps à deux éléments.

(a) Trouver tous les polynômes irréductibles de $\mathbb{F}[X]$ qui sont de degré 2 ou 3.
(b) Déterminer si le polynôme $X^5 + X^3 + 1 \in \mathbb{F}[X]$ est irréductible.
(c) Décider si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{Z}[X]$.
 (i) $X^5 + 3X^3 - 5$;
 (ii) $3X^5 + 2X^3 - 4X^2 - 2$;
 (iii) $3X^5 + 6X^3 + 12X - 30$.

Exercice (4) (5 points) Soit A un anneau factoriel. On suppose que chaque idéal maximal de A est principal.

(a) Si $a_0, b_0 \in A$, tels que $pgcd(a_0, b_0) = 1$. Montrer qu'ils existent $\alpha, \beta \in A$ tels que $\alpha a_0 + \beta b_0 = 1$.
(b) Si $a, b \in A$ et $d = pgcd(a, b)$, montrer que l'idéal (a, b) contient d.
(c) Montrer que A est un anneau principal. (Indication : Si $I \neq \{0\}$, factoriser un élément $a \in I$ en produit d'éléments irréductibles. Utiliser (b) pour trouver un élément $d \in I$ qui divise tout les éléments de I.)

Exercice (5) (2,5 points) Décider quelles équations suivantes ont au moins une solution avec $x, y \in \mathbb{N}$. Trouver toutes les solutions avec $x, y \in \mathbb{N}$ s'il en existe.

(i) $x^2 + y^2 = 250$;
(ii) $x^2 + y^2 = 234003$.