Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques

Année 2023-2024
26 juin 2024

L3-Algèbre 1
Examen
Durée : 3 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Les anneaux dans cet examen sont supposés unitaires et commutatifs.

Exercice (1) (5 points) (Questions de cours)
(a) Enoncer et demontrer le critère d'Eisenstein sur l'irréductibilité de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $(n-1)! \equiv -1(\mod n)$ si et seulement si n est premier (Théorème de Wilson).

Exercice (2) (4 points) Soit A le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ défini par $A = \{\frac{a}{10^k} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N}\}$.
(a) Trouver les éléments inversibles de A.
(b) Est-ce que A est un anneau principal ? Justifier votre réponse.
(c) Décrire les idéaux maximaux de A.

Exercice (3) (4 points) Soit $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Montrer que R n'est pas factoriel.
(b) Trouver un idéal maximal de R qui n'est pas principal. Justifier votre réponse.

Exercice (4) (5 points) Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'anneau des entiers de Gauss. Rappel du cours : $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.
(a) Decomposer les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ suivant en produit d'éléments premiers :
(i) 234 ;
(ii) 715 ;
(iii) 420.
(b) Pour les nombres n suivants, décider lesquels sont somme de deux carrés dans $\mathbb{N}$. S'il existe, trouver une solution de $x^2 + y^2 = n$, avec $x, y \in \mathbb{N}$.
(i) 234 ;
(ii) 715 ;
(iii) 420.

Exercice (5) (2 points) On considère l'anneau $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
(a) R est-il intègre ? Justifier votre réponse.
(b) Trouver l'ensemble d'éléments inversibles de R.