ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE – L3

Durée : 3h

Exercice 1. (QC) Enoncer et démontrer le théorème d'inertie de Sylvester.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-2)^4$.

(ii) On note $F_i = \ker(A - 2I)^i$. Déterminer $\dim(F_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

(iii) En déduire la réduction de Jordan de A.

(iv) Trouver une base de Jordan de A.

(v) Déterminer la réduction de Frobenius et les invariants de similitude de A.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on définit la forme quadratique

$$q_a(x, y, z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

(i) Ecrire q_a comme une somme de carrés de formes linéairement indépendantes à l'aide de la méthode de Gauss.

(ii) En déduire la signature de q_a en fonction de a.

Exercice 4. (i) Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que l'application $q : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \mathrm{tr}({}^tASA)$ est une forme quadratique, et déterminer sa forme polaire.

(ii) On prend $n = 2$ et

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base q-orthogonale de $M_2(\mathbb{R})$.

TOURNER SVP

Exercice 5. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$–e.v. de dimension n. Soient $u, v \in \mathrm{End}(E)$. On définit $L_u : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ par $L_u(f) = u \circ f$ et $R_v : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ par $R_v(f) = f \circ v$.

(i) Montrer que $\mathrm{Ker}(L_u) \cong \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u))$ et $\mathrm{Ker}(R_v) \cong \mathcal{L}(E/\,\mathrm{Im}(v), E)$.

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(L_u) = L_{P(u)}$ et $P(R_v) = R_{P(v)}$.

(iii) En déduire que u (resp. v) est diagonalisable si et seulement si L_u (resp. R_v) est diagonalisable.

(iv) On note $A_{u,v} = L_u - R_v : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$. Montrer que $A_{u,v}$ est diagonalisable si u et v sont diagonalisables.

(v) Montrer que si le polynôme caractéristique $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ est scindé et $A_{u,u}$ est diagonalisable, alors u est diagonalisable.