Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
Licence 3 : 2023 - 2024

Analyse fonctionnelle

Session 2

Durée : 2h

Exercice 1. Soit E l'espace vectoriel des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad u_n = 0.$$

On le munit du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \overline{v_k}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : E \mapsto \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{k}$ est une forme linéaire continue sur E.
2. Existe-t-il un élément u de E tel que, pour tout x de E, on ait $\varphi(x) = \langle u, x\rangle$?
3. Que peut-on en déduire sur E ?

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot\rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$, et F un sous-espace vectoriel fermé de H, non réduit au singleton $\{0\}$. On note p la projection orthogonale de H sur F. Si x est un élément de H, on appelle distance de x à F la quantité

$$d(x, F) = \inf_{y\in F} \|y - x\|.$$

On désigne par $F^\perp$ le sous-espace vectoriel orthogonal à F.

1. Montrer que $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ pour tout $x \in H$.
2. Montrer que
$$d(x, F) = \max\{|\langle x, z\rangle| : z \in F^\perp \text{ et } \|z\| = 1\} \quad \forall x \in H.$$
3. Soit $u \in H$ tel que $\|u\| = 1$. On pose $F = \{x \in H : \quad \langle u, x\rangle = 0\}$. Déterminer l'application linéaire p.
4. Soient $u, v \in H$ deux vecteurs tels que $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\langle u, v\rangle = 0$. On pose
$$F = \{x \in H : \quad \langle u, x\rangle = 0, \quad \langle v, x\rangle = 0\}.$$
Montrer que $F^\perp = \mathrm{Vect}\big(u, v\big)$. En déduire alors le projecteur p sur F.
5. On suppose dans cette question que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, et on note $(u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormale de F. Déterminer en fonction de $(u_1, \cdots, u_n)$ l'expression de p.
6. Soit $H = L^2([0,1])$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Posons F le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égale à 1. Déterminer une base orthonormée de F. En déduire la valeur de :
$$\inf\{\int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt : \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$
7. On suppose désormais que F est un sous-espace de dimension infinie. Justifier que F possède une base hilbertienne, puis exprimer p en fonction de cette base.
8. On suppose maintenant que $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$. Pour n un entier fixé, on pose
$$F_n = \{x \in H; \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\}.$$
   (a) Vérifier que F_n est un sous-espace fermé de H.
   (b) Chercher un sous-espace G_n tel que $F_n \oplus G_n = H$.
   (c) Donner la distance de l'élément $(1, 0, 0, \cdots)$ à F_n.