Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Juin 2024

CALCUL DIFFERENTIEL - SESSION DE RATTRAPAGE

Durée : 1h30

I

Soient $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que s'il existe une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = G \circ f$ sur U, alors il existe une fonction continue $h : U \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in U$, on ait $\mathrm{d}_{(x,y)} g = h(x, y)\, \mathrm{d}_{(x,y)} f$.
2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction continue $h : U \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathrm{d}_{(x,y)} g = h(x, y)\, \mathrm{d}_{(x,y)} f \quad \text{pour tout } (x, y) \in U,$$

et on suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ pour tout $(x, y) \in U$.

   (a) Montrer que l'application $H : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ est un difféomorphisme local en tout point de U.

   (b) Montrer qu'il existe localement (*i.e.* au voisinage de tout point de U) une fonction d'une variable G de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(x, y) = G(f(x, y))$.

II

Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$, une application vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n,\ f(\lambda u) = \lambda^2 f(u).$$

1. Calculer les dérivées directionnelles $f'_v(0)$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. On suppose que f est bornée sur la sphère unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Montrer que f est différentiable en 0.

III

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $S_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\}$.

1. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour ces valeurs, calculer l'équation du plan tangent à S_λ en un point $(x, y, z) \in S_\lambda$.