

Durée 2h, tous documents autorisés
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : Questions de cours (7 pts)

Donnez une réponse synthétique aux questions suivantes.

1. Quelle est la condition d'existence d'une racine de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[x_G, x_D]$?
2. Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires ?
3. A quel type de problèmes appartient l'équation $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ où A est une matrice ?
4. Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU sur la méthode de GAUSS ?
5. Pourquoi doit-on parfois résoudre numériquement une équation différentielle ?
6. Qu'est ce que la matrice de JACOBI ?
7. Dans quel domaine scientifique est utilisé le modèle SIR ?
8. Quel est l'ordre du modèle SIR ?
9. Qu'est ce qui différencie l'interpolation de l'approximation ?
10. Qu'est ce qui différencie la méthode des trapèzes de la méthode de SIMPSON ?

Exercice 2 : Système linéaire (3)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 81 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 110 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 139 \end{cases}$$

1. Donner la mise en équation du système sous la forme $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Préciser A et b .
2. En utilisant la méthode de décomposition LU, donner la solution du système.

Exercice 3 : Recherche de racines (6)

On veut calculer l'unique racine positive r de l'équation $f(x) = 0$ où

$$f(x) = e^x - x - 2$$

On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = e^x - 2$$

$$\varphi_2(x) = \ln(2 + x)$$

1. Comment ces fonctions φ_1 et φ_2 ont-elles été obtenues ? Détaillez vos réponses.
2. Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (justifier)
3. En déduire si les méthodes de points fixes utilisant φ_1 et φ_2 convergent. (justifier)
4. Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2 itérations à partir de $x_0 = 1$.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x_0 ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton ?

Exercice 4 : EDO du premier ordre (4)

On cherche à résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = t^2$$

1. Donner la mise en équation $f'(t) = \phi_E(f(t), t)$
2. Appliquer la méthode d'EULER-CAUCH et faites 2 itérations.