

**Durée 2h, tous documents autorisés**  
Le barème est donné à titre indicatif

### Exercice 1 : Questions de cours (7 pts)

Donnez une réponse synthétique aux questions suivantes.

1. Quelle est la condition d'existence d'une racine de la fonction  $f(x)$  dans l'intervalle  $[x_G, x_D]$ ?
2. Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires?
3. A quel type de problèmes appartient l'équation  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  où  $A$  est une matrice?
4. Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU sur la méthode de GAUSS?
5. Pourquoi doit-on parfois résoudre numériquement une équation différentielle?
6. Qu'est ce que la matrice de JACOBI?
7. Dans quel domaine scientifique est utilisé le modèle SIR?
8. Quel est l'ordre du modèle SIR?
9. Qu'est ce qui différencie l'interpolation de l'approximation?
10. Qu'est ce qui différencie la méthode des trapèzes de la méthode de SIMPSON?

### Exercice 2 : Système linéaire (3)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 81 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 110 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 139 \end{cases}$$

1. Donner la mise en équation du système sous la forme  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ . Préciser  $A$  et  $b$ .
2. En utilisant la méthode de décomposition LU, donner la solution du système.

### Exercice 3 : Recherche de racines (6)

On veut calculer l'unique racine positive  $r$  de l'équation  $f(x) = 0$  où

$$f(x) = e^x - x - 2$$

On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes :

$$\varphi_1(x) = e^x - 2$$

$$\varphi_2(x) = \ln(2 + x)$$

1. Comment ces fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ont-elles été obtenues? Détaillez vos réponses.
2. Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine? (justifier)
3. En déduire si les méthodes de points fixes utilisant  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  convergent. (justifier)
4. Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2 itérations à partir de  $x_0 = 1$ .
5. Pour quelle(s) valeur(s) de  $x_0$  ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton?

### Exercice 4 : EDO du premier ordre (4)

On cherche à résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante :

$$y' + 2y = t^2$$

1. Donner la mise en équation  $f'(t) = \phi_E(f(t), t)$
2. Appliquer la méthode d'EULER-CAUCH et faites 2 itérations.