Université de Bourgogne *Licence de Mathématique et de Mécanique*
Département de Mathématiques *Cours Calcul Scientifique*/ÉDP

Examen du 26 juin 2024

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (6) :
   Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$
   $$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$
   et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
   (b) Calculer les coefficients c_k, $k \in \mathbb{Z}$, de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
   (c) En conclure la décroissance des coefficients pour $k \to \infty$.
   (d) Donner la somme de la série pour $x = 0$. En conclure que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
2. *Équation de Poisson* (8) :
   (a) Résoudre analytiquement pour $x \in [-1, 1]$ l'équation
   $$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = \cos(\pi x), \quad u(-1) = u(1) = 0. \qquad (1)$$
   (b) Écrire un code en Matlab pour calculer la solution de (1) numériquement. Utiliser le code cheb.m pour les matrices de différenciation. Prendre $N = 32$ polynômes, donner le graphe de la solution, calculer la norme de la différence avec la solution exacte.
3. *Stabilité* : (3)
   Pour l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$, la méthode d'Euler explicite prend la forme
   $$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)),$$

où on applique la discrétisation $t = t_0, t_1, t_2, \ldots$ et où $t_{n+1} - t_n = h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. La méthode d'Euler implicite est donnée par

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})).$$

Donner les domaines de stabilité. Une des méthodes est-elle A-stable ? Indication : Étudier l'équation $y'(t) = \lambda y(t)$, où la constante $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\Re\lambda < 0$. Discuter le domaine de stabilité dans le plan complexe de $z = h\lambda$.

4. *Équation de Schrödinger* (3) :
L'équation de Schrödinger dans le vide prend la forme

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \psi \in \mathbb{C}.$$

Donner les conditions aux limites $x = \pm\pi$ pour assurer une solution périodique sur tout $\mathbb{R}$. En utilisant des séries de Fourier, donner la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales $\psi(x, 0) = f(x)$ où $f(x) = f(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.