Université de Bourgogne, Mathématiques — Année universitaire 2023-2024

Géométrie des courbes et des surfaces

Examen final

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée à une question devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1 (Questions de cours). On va reproduire ici une partie de la démonstration du théorème fondamental des courbes dans l'espace, telle qu'elle a été vue en cours. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soient $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions lisses telles que $\kappa(I) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(1) Rappeler les équations de Frenet qui régissent le repère de Frenet $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ de toute courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, birégulière et paramétrée par longueur d'arc, dont κ serait la courbure et dont τ serait la torsion. Puis, réécrire ces équations de Frenet sous une forme matricielle

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{T}' \\ \mathrm{N}' \\ \mathrm{B}' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{B} \end{pmatrix}$$

où l'application $U : I \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ devra être explicitée.

Dans la suite, on fixe $s_0 \in I$ ainsi qu'une base orthonormée directe $(\mathrm{T}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{B}_0)$ de $\mathbb{R}^3$, et on note $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ l'unique solution de $(*)$ qui vaut $(\mathrm{T}_0, \mathrm{N}_0, \mathrm{B}_0)$ en s_0.

(2) Soit $Q : I \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$Q(s) := \begin{pmatrix} \mathrm{T}(s) \\ \mathrm{N}(s) \\ \mathrm{B}(s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{T}(s) \\ \mathrm{N}(s) \\ \mathrm{B}(s) \end{pmatrix}^t .$$

Montrer que Q est constante. Que peut-on en déduire au sujet de la famille $(\mathrm{T}(s), \mathrm{N}(s), \mathrm{B}(s))$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour tout $s \in I$?

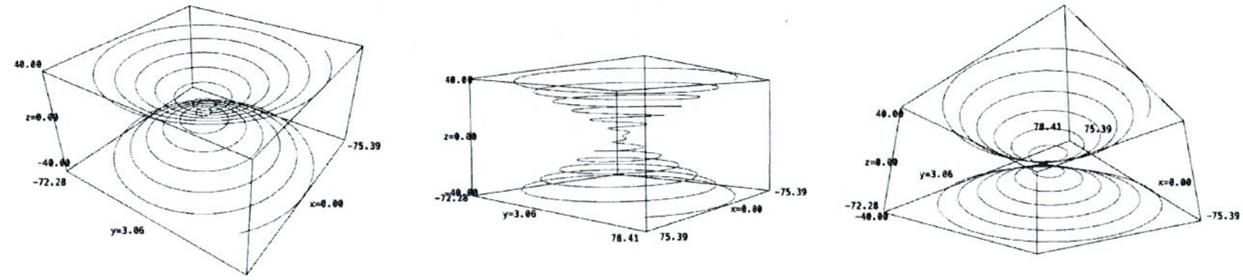
(3) Montrer qu'il existe une courbe $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ avec les propriétés suivantes :
(i) α est birégulière et paramétrée par longueur d'arc ;
(ii) la courbure de α est la fonction κ ;
(iii) la torsion de α est la fonction τ.

(4) Énoncer (sans démonstration) la partie du théorème fondamental des courbes dans l'espace qui n'a pas été traitée dans les questions précédentes de cet exercice.

Exercice 2 (Spirale de Pappus). Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ une constante. On considère la courbe paramétrée $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\beta(t) := \big(\, t\,r\cos(t)\,,\; t\,r\sin(t)\,,\; t\,\big).$$

Voici (pour $r := 2$) la représentation graphique de cette courbe vue sous différents angles :



(1) Montrer que le support de β est contenu dans une quadrique, dont on précisera le nom et une équation.

(2) Calculer $\|\beta'(t) \wedge \beta''(t)\|$. La courbe β est-elle birégulière ?

(3) Calculer la courbure de la courbe β.

(4) Calculer la torsion de la courbe β.

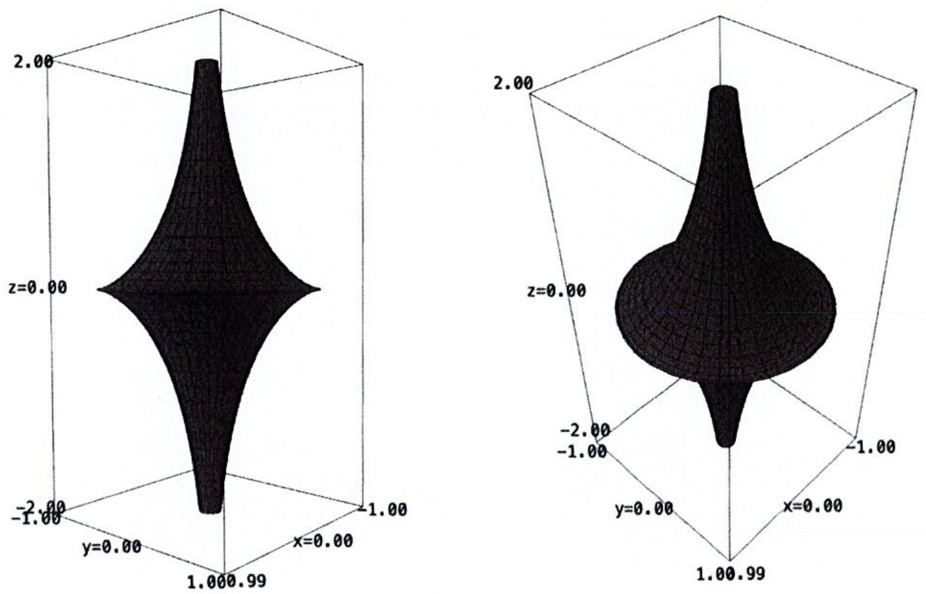
(5) La courbe β est-elle une hélice ?

Exercice 3 (Étude de la pseudo-sphère).

On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := \big(\cos(v)/\cosh(u) \,,\, \sin(v)/\cosh(u) \,,\, u - \tanh(u) \big),$$

dont le support $S := \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est représenté ci-dessous partiellement, sous deux angles différents :



(1) À quelle grande famille de surfaces S appartient-elle ?

(2) Calculer $\left\| \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|$, et déterminer (s'il en existe) les points singuliers de la nappe paramétrée φ.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe un point $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *qu'on suppose régulier pour* φ, on note $p := \varphi(r, s)$ et $f := \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(r, s)$, $g := \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(r, s)$.

(3) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.

(4) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.

(5) Calculer la courbure de Gauss K_p de S au point p. Que remarque-t-on ? Donner (sans justification) deux autres exemples de surfaces, qui sont non-isométriques à S, et qui possèdent cette même propriété pour la courbure.