

# Examen - Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2023/24

Tous les documents sont autorisés

## Partie I (8pts)

**Exercice 1 (3pts):**

A. Donner la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ -a_{n-2} & \text{si } n \geq 2, \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 2 \\ 2 \cdot b_{n-1} - b_{n-2} + 2 \cdot b_{n-3} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

B. Quelle relation existe entre les suites  $a_n$  et  $b_n$  ?

**Exercice 2 (3pt):** Donner la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4 \cdot c_{n-1} - 2^n & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad d_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2 \cdot d_{n-1} + 4^{n-1} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

**Exercice 3 (2pts):** Combien de mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{a, b, c, d\}$  contiennent un nombre impair de  $a$  ?

## Partie II (12pts)

**Exercice 4 (4pts):** Soit  $E$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers positifs ou nuls. On définit sur  $E$  la relation  $(x, y) \sim (u, v) \iff 2$  divise  $y - v$  et  $3$  divise  $x - u$ . Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . Déterminer l'ensemble quotient  $E/\sim$ .

**Exercice 5 (5pts):** On considère la relation  $\mathcal{S}$  définie sur l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers strictement positifs:  $(x, y)\mathcal{S}(a, b)$  si et seulement si on a :  $x$  divise  $a$ , et  $y$  divise  $b$ .

1) Est-ce une relation d'ordre? Justifiez votre réponse.

2) Dessiner le diagramme de Hasse pour l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $1 \leq x \leq 4$  et  $1 \leq y \leq 4$ .

3) Est-ce un treillis? Si oui, est-il distributif?

**Exercice 6 (3pts):** En utilisant la méthode des tableaux de Karnaugh, donner la forme normale disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante :

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (a \vee \bar{d}).$$