

Contrôle Terminal - Lundi 6 mai 2024 (60 min.)

Document recto-verso - 2 exercices à traiter

Exercice 1

1 Généralités sur les méthodes numériques

- 1.1) Définir le principe de discrétisation.
- 1.2) On souhaite discrétiser la coordonnée $x \in [a, b]$ en $N + 1$ points régulièrement espacés de la quantité h , appelée pas de discrétisation. Donner l'expression de la coordonnée x_i en fonction de a , i et h , avec $i = 1 \dots N + 1$.
- 1.3) Donner l'expression du pas de discrétisation h en fonction de a , b et N .
- 1.4) Soit \tilde{x} une approximation d'un nombre réel x . Rappeler les définitions de l'erreur absolue e_a et de l'erreur relative e_r en fonction de x et \tilde{x} .
- 1.5) Citer 2 sources d'erreurs possibles dans la résolution d'un problème en méthode numérique.

2 Interpolation de données

On souhaite calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ passant par 6 couples de points (x_i, y_i) donnés, les x_i étant distincts deux à deux.

- 2.1) Définir les conditions d'interpolations.
- 2.2) De quel degré au maximum est le polynôme d'interpolation obtenu?
- 2.3) Quel test simple peut on effectuer pour vérifier que l'expression obtenue pour le polynôme d'interpolation est correcte?
- 2.4) Quelle commande MATLAB vue en TD permet de réaliser l'interpolation de données par un polynôme? Quelles sont les entrées de cette fonction?

3 Résolution d'équations non linéaires $f(x) = 0$

On souhaite trouver x tel que $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$ donné.

- 3.1) Expliquer en quelques lignes et avec un schéma le principe de la méthode de dichotomie pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- 3.2) Citer une autre méthode vue en CM et en TD permettant de résoudre une telle équation.

4 Dérivation numérique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivable sur I . Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, la formule de Taylor est donnée par :

$$f(x_0 + h) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

- 4.1) A l'aide de la formule de Taylor donnée ci-dessus, exprimer $f(x_i + h)$ et $f(x_i - h)$ pour $n = 2$.
- 4.2) En déduire que :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

- 4.3) Comment s'appelle cette formule de dérivation numérique?
- 4.4) Citer une autre formule de dérivation numérique (dérivée première) vue en CM et donner la formule correspondante.

Exercice 2

On souhaite résoudre un système d'équations linéaires du type $AX = B$ dont la matrice A est une matrice tridiagonale, c'est à dire dont les seuls éléments de A non nuls sont sur la diagonale principale, la sous-diagonale et la sur-diagonale.

Pour cela, on dispose d'une fonction MATLAB d'en-tête $X=DOUBLEBALAYAGE(\alpha, \beta, \gamma, B)$, qui résout le système d'équations linéaires correspondant par la méthode du double balayage (vue en CM et TD). Cette fonction est caractérisée par 4 entrées : les tableaux α, β, γ, B , qui correspondent respectivement aux tableaux comprenant les valeurs de A situées sur : la sous-diagonale, la diagonale principale, la sur-diagonale et le membre de droite de l'égalité.

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 1 \\ 6x_2 + 12x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ 7x_4 + 9x_5 = 1 \end{cases}$$

- 1) Transformer ce système d'équations linéaires sous forme matricielle du type $AX = B$.
- 2) Identifier sur la matrice A la sous-diagonale (α), la diagonale principale (β) et la sur-diagonale (γ).

On souhaite à présent écrire un script MATLAB pour résoudre ce système d'équations linéaires en utilisant cette fonction `DOUBLEBALAYAGE` telle que définie ci-dessus. Dans le fichier script, après l'instruction `clear all; close all; clc;`

- 3) Déclarer les 4 entrées de la fonction `DOUBLEBALAYAGE`.
- 4) Utiliser la fonction `DOUBLEBALAYAGE` pour résoudre ce problème.
- 5) Le tableau B ne contient que des valeurs égales à 1. Quelle fonction MATLAB peut on utiliser dans ce cas?
- 6) Enfin, quelle syntaxe MATLAB (vue en TD) permet de résoudre un système d'équations linéaires à partir de la matrice A et du tableau B ?

Examen de IsPC4a (L2) – Partie POLITANO

2 mai 2023 – durée 1 heure

Document autorisé : Polycopié cours MATLAB/Octave

Question 1 : Réalisation de tests (5 points)

Le rayon musique d'une grande surface offre les conditions suivantes pour l'achat de n DVD audio :

- pour $n > 5$, on bénéficie d'une réduction de 5% sur le montant des achats ;
- pour $3 \leq n \leq 5$, la réduction ne représentera plus que 3% du montant des achats ;
- pour $n < 3$, il n'y a pas de réduction.

Tous les DVD concernés par cette promotion valent 18€ pièce. Écrivez un programme qui demande à l'utilisateur une valeur de n et qui calculera ensuite le montant à payer.

Question 2 : Écriture d'une fonction (5 points)

La période de révolution T d'un satellite artificiel qui circule autour de la Terre sur une orbite circulaire de rayon $R+h$ est donnée par la formule $T = \sqrt{(R+h)^3/c}$.

R est le rayon de la terre et vaut 64000 km, $c=1.3 \cdot 10^{11}$ est une constante et h est l'altitude du satellite.

Écrivez une fonction qui calculera la valeur de T pour une valeur de h passée en argument (variable d'entrée)

Question 3 : Ecriture d'un script (10 points)

Considérons une série de notes : 6, 8, 11, 12, 12, 17. La moyenne arithmétique de ces 6 notes et le nombre $m = \frac{6+8+11+12+12+17}{6} = 11$.

La *variance* de la série est le nombre V donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{6} [(6-11)^2 + (8-11)^2 + (12-11)^2 + (12-11)^2 + (17-11)^2] = \frac{72}{6} = 12.$$

Pour calculer la variance V d'une série de notes, il faut donc :

- calculer la moyenne arithmétique m de la série ;
- pour chaque note, calculer le carré de la différence entre cette note et m ;
- additionner tous les résultats obtenus puis diviser le tout par le nombre des notes.

L'*écart type*, $s = \sqrt{V}$, donne une idée de la dispersion des notes de la série autour de sa moyenne.

Écrivez un programme qui :

1. Demande à l'utilisateur de saisir 20 notes qui seront enregistrées dans un vecteur
2. Calcule la moyenne des notes de ce vecteur.
3. Calcule la variance et l'écart type de la série de notes

Consignes : Vous n'utiliserez pas les fonctions Matlab qui réalisent automatiquement ces calculs (mean, var, std, ...).