Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE1A

Contrôle terminal

12 Janvier 2024 / 8 h — 10 h, hors tiers temps

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication ne sont pas autorisés. L'utilisation des calculettes personnelles est soumise à l'autorisation du responsable de l'épreuve.

Chaque étudiant dispose sur sa table du matériel adéquat pour composer, y compris la carte d'étudiant, dès le début de l'épreuve. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

La qualité de la rédaction ainsi que la présentation entrent pour une part significative dans l'évaluation des copies. *Tous les résultats doivent être suffisamment justifiés.*

Sur la copie principale figure une case où l'étudiant renseigne le nombre d'intercalaires utilisés, recto et verso. Si celle-ci n'est pas renseignée, cela signifie qu'il n'y a pas d'intercalaires.

Il ne sera distribué qu'un seul énoncé par étudiant.

1. Fonctions

1.1. Donner l'ensemble de définition maximal de $\sqrt[4]{x^2-2x-9}$.

Solution :

$\sqrt[4]{t}$ est définie pour $t > 0$. Les deux racines de x^2-2x-9 sont $1-\sqrt{10}$ et $1+\sqrt{10}$. On a

x	$-\infty$		$1-\sqrt{10}$		$1+\sqrt{10}$		$+\infty$
$x-1+\sqrt{10}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1-\sqrt{10}$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-2x-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble cherché est $]-\infty;1-\sqrt{10}] \cup [1+\sqrt{10};+\infty[$

1.2. Calculer la dérivée de $x\ln x$. Trouver $f(x)$ telle que $x\ln x - f(x)$ est une primitive de $\ln x$.

Solution :
On a

$$(x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

et

$$(x \ln x - f(x))' = \ln x + 1 - f'(x)$$

Si $f'(x) = 1$, alors $x \ln x - f(x)$ est une primitive de $\ln x$. $f(x) = x$ convient.

1.3. Calculer la dérivée de $\exp\sqrt{x}$.

Solution :
On a

$$\left(\exp\sqrt{x}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'\left(\exp'\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\exp\sqrt{x}$$

1.4. Soit $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\sin x$. Calculer f', f''.

Solution :
On a

$$(x \sin x)' = x' \sin x + x \sin' x = \sin x + x \cos x$$

et

$$(x \sin x)'' = (\sin x + x \cos x)' = \cos x + x' \cos x + x \cos' x = 2\cos x - x \sin x$$

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - x + 2x^2 - 3x^3$.

2.1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[-1;1]$.

Solution :
Si f est continue sur $[-1;+1]$, si $f(1) \times f(-1) < 0$ alors f s'annule sur $]-1;+1[$.

2.2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution entre -1 et 1.

Solution :
On a

$$P(-1) = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 \text{ et } P(1) = 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

Comme P est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une racine réelle sur $]-1;+1[$.

2.3. Si $x \leq 0$, que peut-on dire du signe de $P(x)$? En déduire que toutes les racines réelles de P sont positives.

Solution :

Pour $x \leq 0$, on a

$$1 - x + 2x^2 - 3x^3 \geq 1 > 0$$

donc toutes les racines réelles de P sont positives.

2.4. En déduire un encadrement de la plus petite racine réelle de P.

Solution :

On a $P(0) > 0$ et $P(1) = 1 - 1 + 2 - 3 = -1$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'une des racines est positive et inférieure à 1. La plus petite est inférieure ou égale à cette racine, donc inférieure à 1.

Étant positive, la plus petite racine réelle est dans $]0;1[$.

3. Théorème des accroissements finis

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$.

3.1. En général, que signifie « $f(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

Solution :
Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

3.2. Énoncer le théorème des accroissements finis sur $[a;b]$ avec $a < b$.

Solution :
Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors on a

$$\exists c \in]a;b[\,,\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

3.3. Peut-on appliquer ce théorème à f sur $[0;t]$ où t désigne un nombre positif ?

Solution :
On a

- $0 < t$,
- f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0;t]$,
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0;t[$.

On peut appliquer le théorème.

3.4. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{e}^t - 1 \leq t\,\mathrm{e}^t$.

Solution :
On a pour tout $t \geq 0$

$$\exists 0 < c < t,\ \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^0 = (t-0)\,\mathrm{e}^c \quad \text{avec} \quad 0 < c < t$$

Comme exp est croissante, on a $\mathrm{e}^c \leq \mathrm{e}^t$ et

$$\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^t - 1 = t\,\mathrm{e}^c \leq t\,\mathrm{e}^t$$

4. Intégration

4.1. Calculer $\displaystyle\int_{x=0}^{1} x^2 - 2x - 5\,\mathrm{d}x$.

Solution :
On a

$$\int_{t=0}^{1} x^2+2\,x-5\,\mathrm{d}x=\left[\frac{t^3}{3}+2\,\frac{t^2}{2}-5\,t\right]_{t=0}^{1}=\frac{1}{3}+1-5=\frac{-11}{3}$$

4.2. Calculer : $\displaystyle\int_{t=0}^{1} 2^t\,3^{2t}\,\mathrm{d}t$.

Solution :
On a

$$2^t\,3^{2t}=2^t\,9^t=18^t=\mathrm{e}^{t\,\ln 18}$$

d'ou

$$\int_{t=0}^{1} 2^t\,3^{2t}\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^{1} \mathrm{e}^{t\ln 18}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^{t\ln 18}}{\ln 18}\right]_{t=0}^{1}=\frac{\mathrm{e}^{\ln 18}-1}{\ln 18}=\frac{18-1}{\ln 18}=\frac{17}{\ln 18}$$

4.3. Montrer que $\cos x\,\mathrm{e}^x=\dfrac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}+\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}}{2}$. En déduire $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi}\cos x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Solution :
On a

$$\cos x\,\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\,\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\,\mathrm{e}^x}{2}=\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}+\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}}{2}$$

donc

$$\int_{x=0}^{\pi}\cos x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}+\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\pi}\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{x=0}^{\pi}\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs,

$$\int_{x=0}^{\pi}\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}}{1+\mathbf{i}}\right]_{x=0}^{\pi}=\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})\pi}-1}{1+\mathbf{i}}=\frac{-\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+\mathbf{i}}=-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1+\mathbf{i}}$$

et

$$\int_{x=0}^{\pi}\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}}{1-\mathbf{i}}\right]_{x=0}^{\pi}=\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})\pi}-1}{1-\mathbf{i}}=\frac{-\mathrm{e}^{\pi}-1}{1-\mathbf{i}}=-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1-\mathbf{i}}$$

d'où

$$\int_{x=0}^{\pi}\cos x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}\left(\frac{1}{1+\mathbf{i}}+\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right)=-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}\times\frac{1-\mathbf{i}+1+\mathbf{i}}{1^2-\mathbf{i}^2}=-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$$

5. Formes indéterminées

On appliquera la **règle de l'Hôpital** : a et ℓ désignent des nombres, f et g désignent deux fonctions dérivables au voisinage de a,

$$\text{si } \lim_a f = \lim_a g = 0 \text{ et } \lim_a \frac{f'}{g'} = \ell \text{ alors } \lim_a \frac{f}{g} = \ell$$

5.1. Donner, si elle existe, la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - 1}{e^{\beta x} - 1}$ pour $\alpha, \beta > 0$.

Solution :

On a

- $e^{\alpha x} - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $e^{\beta x} - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,
- $(e^{\alpha x} - 1)' = \alpha\, e^{\alpha x}$ donc $(e^{\alpha x} - 1)' \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha$,
- $\left(e^{\beta x} - 1\right)' = \beta\, e^{\beta x}$ donc $\left(e^{\beta x} - 1\right)' \xrightarrow[x\to 0]{} \beta$.

Au total, on applique la règle de l'Hôpital pour obtenir $\dfrac{(e^{\alpha x} - 1)'}{\left(e^{\beta x} - 1\right)'} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{\alpha}{\beta}$ et $\dfrac{e^{\alpha x} - 1}{e^{\beta x} - 1} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{\alpha}{\beta}$

5.2. Donner, si elle existe, la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

Solution :

On a, tenant compte des calculs déjà effectués précédemment,

- $x \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $1 - \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,
- $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ donc $(x \sin x)' \xrightarrow[x\to 0]{} 0$,
- $(x \sin x)'' = 2 \cos x - x \sin x$ donc $(x \sin x)'' \xrightarrow[x\to 0]{} 2$,
- $(1 - \cos x)' = \sin x$ donc $(1 - \cos x)' \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
- $(1 - \cos x)'' = \cos x$ donc $(1 - \cos x)'' \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Au total, deux applications successives de la règle de l'hôpital donnent $\dfrac{(x \sin x)''}{(1 - \cos x)''} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$, $\dfrac{(x \sin x)'}{(1 - \cos x)'} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$ et $\dfrac{x \sin x}{1 - \cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$.

6. Équations différentielles ordinaires

6.1. Soit l'équation différentielle ordinaire (E) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

6.1.1. r désigne un nombre. Quelle est la signification mathématique de « e^{rx} est une solution de (E) » ?

Solution :
Cela signifie que $(e^{rx})'' - 2\,(e^{rx})' - 3\,e^{rx} = 0$.

6.1.2. Quelles sont les solutions de (E) de la forme e^{rx} ?

Solution :
Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$(e^{rx})'' - 2\,(e^{rx})' - 3\,e^{rx} = r^2\,e^{rx} - 2\,r\,e^{rx} - 3\,e^{rx} = (r^2 - 2\,r - 3)\,e^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $r^2 + 2\,r - 3 = 0$. Donc r vaut -1 ou 3. Réciproquement, pour $r = -1$ on a

$$(e^{-x})'' - 2\,(e^{-x})' - 3\,e^{-x} = e^{-x} + 2\,e^{-x} - 3\,e^{-x} = 0$$

et pour $r = 3$ on a

$$\left(e^{3x}\right)'' - 2\left(e^{3x}\right)' - 3\,e^{3x} = 9\,e^{3x} - 6\,e^{3x} - 3\,e^{3x} = 0$$

6.1.3. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution :
Les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = k_1\,e^{-x} + k_2\,e^{3x}$ où k_1 et k_2 sont des constantes.

6.1.4. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$.

Solution :
On détermine k_1 et k_2 tels que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$. Cela donne

$$y(0) = 2 = k_1\,e^{-0} + k_2\,e^{3\times 0} = k_1 + k_2$$

et comme $y'(x) = -k_1\,e^{-x} + 3\,k_2\,e^{3x}$

$$y'(0) = 2 = -k_1\,e^{-0} + 3\,k_2\,e^{3\times 0} = -k_1 + 3\,k_2$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 2 = k_1 + k_2 \\ 2 = -k_1 + 3\,k_2 \end{cases}$$

dont la solution est $k_1 = k_2 = 1$. La solution cherchée est donc $e^{-x} + e^{3x}$.

6.2. Soit (E) $y'' - 2y' + 1y = 0$.

6.2.1. Quelles sont les solutions de la forme e^{rx} où r est un nombre ?

Solution :
Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$(e^{rx})'' - 2(e^{rx})' + 1\,e^{rx} = r^2\,e^{rx} - 2r\,e^{rx} + 1\,e^{rx} = (r-1)^2\,e^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $(r-1)^2 = 0$. Donc r vaut 1. Réciproquement, on a

$$(e^x)'' - 2(e^x)' + e^x = e^x - 2\,e^x + e^x = 0$$

6.2.2. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution :
Les solutions de (E) sont donc de la forme $(k_1 + x\,k_2)\,e^2$ où k_1 et k_2 sont des nombres.

6.2.3. Si y est une solution de (E), $y + 2024$ est une solution de quelle équation semblable à (E) ?

Solution :
On a

$$(y + 2024)'' - 2\,(y + 2024)' + (y + 2024) = y'' - 2\,y' + y + 2024$$

donc si y est solution de (E) alors $y+2024$ est solution de $z'' - 2\,z' + z = 2024$.

6.2.4. En déduire toutes les solutions de (E') $y'' - 2y' + y = 20$.

Solution :
On remplace 2024 par 20 : les solutions de (E') sont de la forme $(k_1 + x\,k_2)\,e^x + 20$ où k_1 et k_2 sont des nombres.