

Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE1A

Deuxième session

24 Juin 2024 / 13 h 30 — 15 h 30 (hors tiers temps)

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication ne sont pas autorisés. Les instruments électroniques de calcul sont autorisés selon les consignes des surveillants.

Dès le début de l'épreuve, chaque étudiant dispose sur sa table du matériel adéquat pour composer, y compris la carte d'étudiant. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

La qualité de la rédaction ainsi que la présentation entrent pour une part significative dans l'évaluation des copies. *Tous les résultats doivent être suffisamment justifiés.*

Sur la copie principale figure une case où l'étudiant renseigne le nombre d'intercalaires utilisés. Si celle-ci n'est pas renseignée, cela signifie qu'il n'y a pas d'intercalaires.

Il ne sera distribué qu'un seul énoncé par étudiant.

1. Restitution de connaissances

- 1.1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- 1.2. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Nombres complexes

- 2.1. Donner l'interprétation géométrique du module et de l'argument d'un nombre complexe.
- 2.2. Énoncer la formule d'Euler. En déduire toutes les valeurs de θ réel pour lesquelles $e^{i\theta} = i$?
- 2.3. Mettre $(\sqrt{3} - i)^{123}$ sous forme de l'exponentielle d'un nombre complexe.
- 2.4. Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$ avec la méthode du cours.
- 2.5. En déduire les solutions de $z^2 + (2 - 3i)z - 5/2 = 0$.
- 2.6. Racines cubiques.
 - 2.6.1. On cherche les racines cubiques de $11 - 2i$ dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers.
 - 2.6.1.1. Restreindre l'ensemble des possibilités en utilisant le module.
 - 2.6.1.2. En déduire le résultat.

3. Exponentielle et logarithme

- 3.1. Simplifier le nombre réel $\sqrt[3]{\frac{3^5 \left(\frac{3^{-3}}{3^3}\right)^2 (3^2)^3}{3^2 \times 3^{-3}}}$ sans utiliser d'outil numérique.
- 3.2. Démontrer, par l'étude de fonctions, que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 1 + x < e^x.$$

En déduire la limite de $\exp x$ quand x tend vers $+\infty$.

- 3.3. Trouver x réel tel que $\ln(x+2) = \ln(x+11) - \ln(x+3)$.

4. Intégration

- 4.1. On rappelle que $n!$ désigne $1 \times 2 \times 3 \dots n$ lorsque n est un entier naturel positif.

Donner une primitive de $\frac{t^n}{n!}$.

- 4.2. Calculer la dérivée de $x \ln x$. En déduire la valeur de $\int_{x=1}^2 \ln x \, dx$.

- 4.3. Calculer $\int_{t=0}^1 3^t 4^{3t} \, dt$.

- 4.4. Montrer que $\sin x \, e^x = \frac{e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}}{2i}$. En déduire $\int_{x=0}^{\pi} \sin x \, e^x \, dx$.

5. Équations différentielles ordinaires

Soit l'équation différentielle ordinaire (E) $2y'' - y' - y = 0$.

- 5.1. r désigne un nombre. Quelle est la signification mathématique de « e^{rx} est une solution de (E) » ?
- 5.2. Quelles sont les solutions de (E) de la forme e^{rx} ?
- 5.3. En déduire toutes les solutions de (E).
- 5.4. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 5$ et $y'(0) = -1$