

**Examen du 11 janvier 2024, 13h00-15h00.**

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln(x + 2).$$

- a. Donner le domaine de définition de  $f$ .
- b. Calculer les limites au bord du domaine de définition et à l'infini.
- c. Calculer la dérivée de  $f$  et donner le domaine de dérivabilité de  $f$ .
- d. Trouver tous les points critiques de  $f$ .
- e. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de  $f$ .

2. Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- a.  $\frac{1}{(x-1)^2}$ ,
- b.  $\frac{1}{x^2-1}$ ,
- c.  $\frac{1}{x^2+1}$ .

3. Calculer les intégrales suivantes :

- a.  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$ ,
- b.  $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$ .

4. Donner la dérivée de :

$$g(x) = \int_0^x \arctan^3(t) dt.$$

5. Déterminer les trois premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{1}{1 - x + x^2 - 2x^3}.$$

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x) - 1}{e^{x^2} - 1 - x^2}.$$