

Examen du 11 janvier 2024, 13h00-15h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln(x + 2).$$

- Donner le domaine de définition de f .
- Calculer les limites au bord du domaine de définition et à l'infini.
- Calculer la dérivée de f et donner le domaine de dérivabilité de f .
- Trouver tous les points critiques de f .
- Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

2. Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- $\frac{1}{(x-1)^2}$,
- $\frac{1}{x^2-1}$,
- $\frac{1}{x^2+1}$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$,
- $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

4. Donner la dérivée de :

$$g(x) = \int_0^x \arctan^3(t) dt.$$

5. Déterminer les trois premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{1}{1 - x + x^2 - 2x^3}.$$

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \frac{1}{2}x \sin(x) - 1}{e^{x^2} - 1 - x^2}.$$