

Examen du 21 juin 2024, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$2x^2 + 1 > |4x|.$$

2. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{(x - 2)^2}.$$

- Est-il possible de simplifier la forme de f ?
- Donner le domaine de définition de f .
- Calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.
- Calculer la dérivée de f .
- Trouver tous les points critiques de f .
- Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $x \mapsto e^{5x+1}$,
- $x \mapsto \ln(x^4 + x^2 + 1)$,
- $x \mapsto \sqrt{x^8 + x^2 + 1}$,
- $x \mapsto \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$.

On pourra préciser l'intervalle sur lequel on calcule la dérivée.

4. Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- $\frac{1}{x-2}$,
- $2x \cos(2x)$,
- $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

5. Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x))^{2n+1} dx$, où n est un entier positif,
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x)^2 dx$.

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} \left(\frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x^2} - e^x + 2 \sin(x) \right).$$