

## Examen – 8 janvier 2024

– Durée : 2h –

*L'usage de notes, d'une calculatrice ou de tout autre appareil électronique n'est pas autorisé. Tout argument mathématique doit être soigneusement justifié, en privilégiant clarté et concision.*

### Exercice 1. (Questions de cours)

1. Énoncez le théorème de la bijection. [1 point]
2. Quel est le développement limité de  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  en 0 à l'ordre 3? [1 point]

### Exercice 2. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $x \mapsto \ln(\cosh(x))$ .

1.  $f$  est-elle paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre? [0,5 point]
2. Déterminez le développement limité en 0 à l'ordre 4 de  $f$ . [1,5 points]
3. Quel est, localement au voisinage de 0, la position de  $\Gamma_f$  par rapport à la courbe d'équation  $y = \frac{x^2}{2}$ ? [0,5 point]
4. Montrez que :  $\forall t \geq 0, \quad \tanh(t) \leq t$ . [2 points]
5. Montrez que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \tanh(t) dt$ . [1,5 points]
6. Déduisez des questions précédentes que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq \frac{x^2}{2}$ . [1 point]

### Exercice 3. On considère la fraction rationnelle $g(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$ .

1. Déterminez le domaine de définition (maximal) de  $g$ , que vous noterez  $\mathcal{D}_g$ . [1 point]
2. Montrez que  $g$  établit une bijection de  $]3, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . [2 points]
3. À l'aide d'un développement limité en  $+\infty$ , déterminez la position de  $\Gamma_g$  par rapport à la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$  au voisinage de  $+\infty$ . [2 points]
4. Décomposez  $g$  en éléments simples (aussi appelés fractions partielles). [2 points]
5. Déterminez les primitives de  $g$ . [1 point]
6. Déterminez l'aire algébrique sous le graphe de  $g$  entre 0 et 1. [1 point]  
 [On rappelle que par "aire algébrique sous le graphe" on entend une aire délimitée par le graphe qui est comptée ~~positivement~~ <sup>positivement</sup> sur les intervalles où le graphe est au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement autrement.]

### Exercice 4. Déterminez les primitives suivantes :

[3 points]

$$(a) \int (x^2 + 1)e^{-x} dx \qquad (b) \int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$$