Examen – Session 2 – 20 juin 2024

– *Durée : 2h* –

L'usage de notes, d'une calculatrice ou de tout autre appareil électronique n'est pas autorisé. Tout argument mathématique doit être soigneusement justifié, en privilégiant clarté et concision.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Énoncez la formule de Taylor-Young.

Exercice 2. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x(x-3)+3$.

1. Déterminez, si elles existent, les limites suivantes
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
2. f est-elle dérivable ? Si oui, déterminez f'.
3. Dressez le tableau de variations de f.
4. Montrez qu'il existe un unique $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$. De plus, montrez que : pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq x_0$.
[Vous pourrez utiliser le fait que $e^2 > 3$ sans démonstration.]
5. Déterminez une primitive de f.
6. Soit $\mathcal{D}$ le domaine borné du plan délimité par le graphe Γ_f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = x_0$. Autrement dit, on a :
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq x_0\,, f(x) \leq y \leq 0\}$$
Soit A l'aire de $\mathcal{D}$. Déterminez une expression de A en fonction de x_0. Simplifiez cette expression jusqu'à obtenir une fraction rationnelle en x_0.

Exercice 3. On définit la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{e^x-1}$.

1. Déterminez le développement limité (généralisé) de g à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. Déduisez-en que g est prolongeable par continuité en 0, en une fonction que vous noterez $\tilde{g}$. Que vaut $\tilde{g}(0)$?
3. Quelle est la position relative du graphe Γ_g par rapport à la courbe d'équation $y = x^2$ au voisinage de 0^+ ?
4. Montrez que g est dérivable et que : pour tout $x > 0$
$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq 0\,,$$
où f est la fonction introduite dans l'exercice 2.
5. À l'aide de la question 4 de l'exercice 2, montrez que g admet un unique maximum et que celui-ci est atteint en x_0.

Exercice 4. Soit h la fraction rationnelle définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$, $h(x) = \frac{10-x}{x^2+x-2}$. Décomposez h en éléments simples et trouvez-en une primitive.