Examen
Durée : 2 heures

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) **(6 points) (Questions de cours)** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

(a) (i) Montrer que f est injective si et seulement si le noyau $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$.

(ii) Si f est un endomorphisme (c.-à-d., $E = F$) et si λ est une valeur propre de f, donner la définition de l'espace propre E_λ.

(b) Supposer que E et F sont de dimension finie. Décider, sans justification, si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.

(i) L'image $Im(f)$ de f est un sous-espace vectoriel de F.

(ii) $\dim(E) = \dim(F) - \dim(\ker(f))$.

(iii) Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est un isomorphisme.

(iv) Si f est un isomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

(c) Soit $h_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ (sens trigonométrique) dans le plan. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

(i) Déterminer la matrice $A_\theta = Mat(h_\theta; \mathcal{C})$.

(ii) Calculer le polynôme caractéristique de A_θ.

(2) **(5 points)** Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + 2z &=& -1 \\ ax - 2z &=& 1 \\ x + y + az &=& 0 \end{array} \right.$$

(a) Ecrire (S) sous forme matricielle : $A_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(b) Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est-elle inversible ?

(c) Calculer le rang de A_a en fonction de a.

(d) Résoudre (S) pour $a = 0, 1$ et 2.

(3) **(4 points)** Calculer les déterminants des matrices suviantes, et détermnier les inverses s'ils existent :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) **(5 points)** Notons $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où :

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $v = e_1 + e_2 + e_3$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $Mat(f; \mathcal{C}) = M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice $M' = Mat(f; \mathcal{B}')$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

(c) Trouver $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = v$, et $f(v) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3$.