Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B : Algèbre linéaire et géométrie

Année 2023-2024
19 juin 2024

Examen - Session 2
Durée : 2 heures

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) **(5 points)** (Question de cours) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
  (a) Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Donner la définition d'une valeur propre de f et la définition d'un espace propre.
  (b) Montrer qu'un espace propre est un sous-espace vectoriel et que sa dimension est ≥ 1.
  (c) Décider, sans justification, si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.
    (i) Si $v \in E$ est un vecteur non nul, alors $\dim(Vect(v)) = 1$.
    (ii) Si $v, w \in E$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\dim(Vect(v, w)) = 2$.
    (iii) La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
    (iv) Un endomorphisme f de E est un automorphisme si et seulement si f est surjectif.

(2) **(4 points)**
  (a) Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs des nombres réels a et b le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ x + y + 2bz = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

  a zéro, une ou une infinité de solutions.
  (b) Résoudre le système pour : $a = b = 0$.

(3) **(3 points)** Déterniner si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer les inverses s'ils existent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) **(4 points)** Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & a+5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est M_a.
  (a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M_a est inversible.
  (b) Pour chaque valeur $a \in \mathbb{R}$, determiner les dimensions de l'image et du noyau de f_a.
  (c) Pour $a = 0$, déterminer une base du noyau et une base de l'image de f_0.

(5) **(4 points)** Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré ≤ 3. Soit $h : E \to E$ l'application linéaire $h(P) = XP'' + 2P$. Soit $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.
  (a) Déterminer la matrice $M = Mat(h; \mathcal{C})$ de h par rapport à la base $\mathcal{C}$.
  (b) Calculer le déterminant, $\det(M)$.
  (c) Soit $\mathcal{B} = (1, X + 1, X^2 + X, X^3 + X^2 + 1)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E. Soit $N = Mat(h; \mathcal{B})$, la matrice de h par rapport à la base $\mathcal{B}$. Quel est le déterminant de N ?