Deuxième session – 13/06/2024 – 2 heures
Math3A : analyse – L2 S&T

Exercice 1 : Séries équivalentes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n+1} \end{cases}$$

1. Indiquez les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, et u_5, ainsi que celles de v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, et v_5. *Dans cette question spécifique, on ne vous demande pas de justification*
2. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et celles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Comment définit-on le fait que deux suites soient équivalentes ? *(Rappelez la définition vue en cours.)*
4. Montrer que $u_n \sim u_n + v_n$.
5. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
6. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n + v_n)$.

Exercice 2 :

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ ci dessous :

i) $\sum \frac{1}{n^4+3} z^{4n}$ ii) $\sum \left(-\frac{3n}{n+1}\right)^n z^n$ iii) $\sum \sqrt{(n+2)!}z^n$

Exercice 3 : Suites adjacentes ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{u_n}{3+u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.
2. Montrer que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante tandis que la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est négative et croissante. *Indication : on pourra par exemple écrire une relation de récurrence satisfaite par chacune de ces deux sous-suites.*
3. Déduire que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et déterminer leur limite.
4. Les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles adjacentes ? *N'oubliez pas de justifier votre réponse (comme à toutes les questions d'ailleurs).*

Exercice 4 : Nature de séries de fonctions

On considère deux suites de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant |g_n(x)|$.

1. On suppose dans un premier temps que toutes les fonctions f_n et g_n sont positives : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \min(f_n(x), g_n(x)) \geqslant 0$. *Pour chaque question si dessous, si l'affirmation est correcte, démontrez le à partir des résultats vus en concours. Si elle est fausse, donnez un contre-exemple qui montre que ce n'est pas le cas.*
   (a) Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$?
   (b) Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$?
   (c) Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$?
2. Dans cette deuxième question, on ne suppose plus que les fonctions soient positives (mais on continue à supposer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant |g_n(x)|$). On pose à nouveau les mêmes trois questions, auxquelles vous devez indiquer si l'affirmation est vraie, et apporter soit une preuve (si elle est vraie) soit un contre-exemple (qui montre qu'elle est fausse).
   (a) Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge **simplement** sur $\mathbb{R}$?
   (b) Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$?
   (c) Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$, peut-on en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge **normalement** sur $\mathbb{R}$?
3. On considère désormais une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, |u_0(x)| \leqslant |\cos(x)| \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leqslant \left|\frac{\cos(x)}{n!}\right| \end{cases}$$
   (a) Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les fonctions u_n soient les sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.
   (b) Déduire de ce qui précède que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.