Examen session 2

Mardi 18 juin 2024 (Durée: 2h)

Exercice 1 (Questions de cours (6 points)).

(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Énoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux pour une application linéaire $f \in \mathrm{End}(E)$ qui admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{K}[X]$ qui est produit de deux polynômes premiers entre eux.

(2) Énoncer et démontrer le théorème d'existence de la base antéduale.

(3) Application: Soit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trois formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^3$ telle que

$$\varphi_1(x,y,z) = 2x + z, \varphi_2(x,y,z) = x + 2y, \varphi_3(x,y,z) = y + 2z.$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme une base de E^* et déterminer sa base antéduale.

Exercice 2 (Maîtrise de concepts (5 points)).

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Toute réponse non clairement justifiée ne sera pas considérée.

(1) Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & ab \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

(2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3, de polynôme caractéristique $\chi_f(X) = X^3 - 2X^2 + X$. Alors f est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker(f - id_E) = 2$.

(3) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables qui commutent, alors $A + B$ est diagonalisable.

(4) La somme de deux matrices nilpotentes est une matrice nilpotente.

(5) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que A^2 est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.

Exercice 3 (3 points).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur non nul de A.

(2) Montrer que si P est un polynôme annulateur de A de degré strictement inférieur à 2, alors P est nul. En déduire le polynôme minimal de A.

(3) Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 4 (4 points).

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

telle que pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$f(P)(X) = (X^2+1)P''(X) + P'(X) + P(X).$$

(1) Calculer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(3) Calculer les projecteurs spectraux de A et la décomposition de Dunford de A.

Exercice 5 (4 points).

On considère $A, D, N \in M_3(\mathbb{C})$ les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que la décomposition de Dunford de A est $A = D + N$.

(2) Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que PDP^{-1} est diagonale.

(3) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer A^n.