MATH3C

L2 : Probabilités **Date** : Jeudi 21 décembre 2023 **Durée** : 2h

Examen de Probabilités

Exercice 1 : On lance un dé équilibré de manière indépendante autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir le numéro 6 pour la première fois. Soit X le nombre de lancers effectués.

▷ **1)** Quelle est la loi de X ? Donner la valeur de son espérance et de sa variance.

▷ **2)** Soit A_i l'événement "le i-ième lancer n'est pas un 6". Exprimer $\{X > n\}$ à l'aide des A_i.

▷ **3)** Calculer $P(X > n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

▷ **4)** On lance un dé équilibré de manière indépendante autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir le numéro 6 ou le numéro 1. On note Y le nombre de lancers effectués.

(a) Quel est le nombre moyen de lancers ? Justifier.

(b) Calculer la probabilité que le nombre de lancers effectués soit inférieur ou égal à 5.

▷ **5)** On lance un dé équilibré de manière indépendante autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir d'abord le numéro 6 puis ensuite le numéro 1. On note $Z = X + X'$ le nombre de lancers effectués où X et X' représentent respectivement le nombre de lancers effectués pour avoir 6 et 1.

(a) Calculer le nombre moyen de lancers effectués et la variance de Z. Justifier.

(b) Déterminer la loi de Z.

Exercice 2 : En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires :

— Avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés.

— Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

▷ **1)** Quel est le taux global de personnes soulagées ? Énoncer la formule générale utilisée justifiant ce calcul.

▷ **2)** Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ? Énoncer la formule générale utilisée justifiant ce calcul.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction définie pour tout $z \in]-1, 1[$ par $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$.

▷ **1)** Justifier que l'espérance précédente est bien définie et que $|G_X(z)| \leq 1$.

▷ **2)** Calculer $G_X(z)$ lorsque $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

▷ **3)** Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $G_X(z) = G_Y(z)$ pour tout $z \in]-1, 1[$. Montrer que X et Y ont la même loi.

▷ **4)** Soient X et Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$.

▷ **5)** En déduire, en utilisant les résultats précédents, que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ respectivement est une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition définie par $F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = \frac{1}{2}$ si $0 \leq x < 1$ et $F(x) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}(1 - e^{-(x-1)})$ si $x \geq 1$.

▷ **1)** Justifier que F est bien une fonction de répartition.

▷ **2)** La variable précédente admet-elle une densité ? Justifier.

▷ **3)** Que valent les probabilités suivantes : a) $\mathbb{P}(X \leq 2)$ b) $\mathbb{P}(X \leq 0)$ c) $\mathbb{P}(X = 0)$ d) $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right)$ e) $\mathbb{P}(X = 1)$ f) $\mathbb{P}(X = 2)$ g) $\mathbb{P}\left(0 < X \leq \frac{1}{2}\right)$ h) $\mathbb{P}(0 \leq X < 2)$ i) $\mathbb{P}(X > 1)$.

▷ **4)** Montrer que quelque soit l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne contenant ni 0 ni 1 on a

$$\mathbb{P}(X \in I) = \frac{1}{6} \int_I e^{-t} dt.$$

Exercice 5 : On note p_n la probabilité que deux entiers de $[|1, n|]$ choisis uniformément au hasard soient premiers entre eux, c'est à dire que leur pgcd soit égal à 1. On va montrer que

$$p_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^{2},$$

où μ est la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{0, 1, -1\}$ définie par $\mu(d) = 0$ si d est divisible par le carré d'un nombre premier, $\mu(d) = 1$ si $d = 1$ ou si d est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts et $\mu(d) = -1$ si d est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts. Dans toute la suite on se placera sur l'espace de probabilité donné par $\Omega = [1, n] \times [|1, n|]$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. On s'intéresse donc à la probabilité p_n de l'événement $B_n = \{(a, b) \in [|1, n|] \times [|1, n|] : \text{pgcd}(a, b) = 1\}$. Soient $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. On considère $A_i = \{(a, b) \in [|1, n|] \times [|1, n|] : p_i \mid a \text{ et } p_i \mid b\}$ l'ensemble des couples d'entiers divisibles par le $i$ème nombre premier.

▷ **1)** Appliquer la formule pour $n = 10$ et donner le résultat.

▷ **2)** Exprimer le complémentaire de l'événement B_n en fonction des événements $A_1, A_2, \cdots, A_k$.

▷ **3)** Soit $m \in [|1, n|]$. Justifier que le nombre de multiples de m dans $[|1, n|]$ est $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre x et que quelque soit $I \subseteq [1, k]$ non vide,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \left\{ (a, b) \in [|1, n|] \times [|1, n|] : \prod_{i \in I} p_i \mid a \text{ et } \prod_{i \in I} p_i \mid b \right\}.$$

▷ **4)** En déduire que

$$p_n = 1 - \sum_{\substack{I \subseteq [1,k] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{card}(I)-1} \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2 = 1 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d) \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2,$$

puis le résultat annoncé. Remarque : on peut montrer que $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{6}{\pi^2} \simeq 0.6079$.