L2 : Probabilités **Date** : Mardi 18 juin 2024 **Durée** : 2h

Examen de Probabilités

Exercice 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$.

$\triangleright$ **1)** Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

$\triangleright$ **2)** Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{V}(Z)$.

$\triangleright$ **3)** Calculer $\mathbb{P}(X = 0|Z = 0)$.

$\triangleright$ **4)** Les variables Z et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 : Une amie à vous vous informe que ses parents ont eu deux enfants et qu'elle même adore les probabilités. Vous voulez calculer la probabilité que votre amie ait une sœur. On suppose que la probabilité de donner naissance à une fille ou à un garçon est la même, et ce indépendamment des éventuelles naissances précédentes, et que le fait d'aimer ou non les probabilités pour une fille est une donnée indépendante de sa fratrie. On note p la probabilité qu'une fille adore les probabilités. Le symbol $F_\heartsuit$ représentera une fille qui adore les probabilités, le symbol $F_\square$ une fille qui ne les aime pas plus que ça, et le symbole G un garçon (le fait qu'il aime ou non les probabilités n'est pas une information prise en compte ici). Soit Ω l'univers représentant toutes les configurations possible d'une fratrie quelconque de deux enfants en tenant compte du sexe, du fait si oui ou non une fille aime les probabilités et de l'ordre d'apparition. Par exemple $F_\heartsuit G$ représente une fratrie dont L'aînée est une fille qui adore les probabilités et le cadet un garçon. On a ainsi

$$\Omega = \{F_\heartsuit F_\heartsuit; F_\heartsuit F_\square; F_\heartsuit G; F_\square F_\square; F_\square F_\heartsuit; F_\square G; GF_\heartsuit; GF_\square; GG\}$$

$\triangleright$ **1)** Justifier que $\mathbb{P}(\{F_\square G\}) = \frac{1-p}{4}$ et déterminer plus généralement la probabilité des neufs événements élémentaires.

$\triangleright$ **2)** Décrire comme des sous-ensembles de Ω les événements

— A : "il y a au moins une fille qui adore les probabilités dans la fratrie" ;

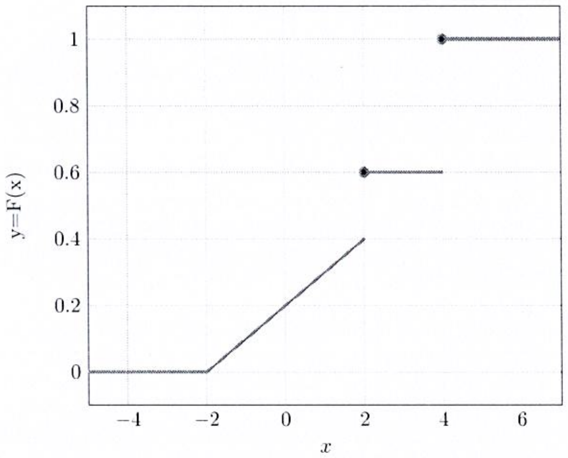
— B : "la fratrie est composée de deux filles dont l'une au moins adore les probabilités".

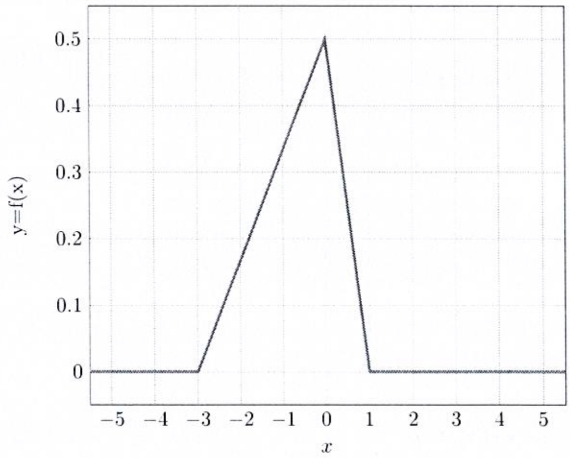
$\triangleright$ **3)** Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{p}{2}$.

$\triangleright$ **4)** Calculer $\mathbb{P}(B|A)$ en fonction de p.

$\triangleright$ **5)** Que se passe-t-il lorsque $p \to 1$ et $p \to 0$

Exercice 3 : La figure ci-dessous représente le graphe de la fonction de répartion F d'une variable aléatoire X (à gauche) et le graphe de la densité d'une variable aléatoire Y (à droite).





Déterminer en justifiant les probabilités suivantes :

▷ **1)** **i)** $\mathbb{P}(X = 4)$ **ii)** $\mathbb{P}(X \leq 0)$ **iii)** $\mathbb{P}(0 < X \leq 3)$ **iv)** $\mathbb{P}(1 \leq X < 4)$ **e)** $\mathbb{P}(X > 2)$.

▷ **2)** **i)** $\mathbb{P}(-3 < Y < 1)$ **ii)** $\mathbb{P}(Y < 0)$ **iii)** $\mathbb{P}(-1 < Y < 2)$

Exercice 4 : On lance indéfiniment une pièce truquée tombant sur pile deux fois plus souvent que sur face et ce de façon indépendante. On identifie "pile" avec 1 et "face" avec 0. On note X_n le résultat du $n$ème lancé de sorte que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ soient indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p. On s'intéresse au rang d'apparition de la première séquence de deux piles consécutifs, à savoir

$$R = \inf\{k \geq 2 : X_{k-1} = 1, X_k = 1\}.$$

▷ **1)** Que vaut p ?

▷ **2)** Soit T le rang d'apparition du premier pile. Quelle est la loi de T ?

▷ **3)** Les six premiers lancés donnent la séquence $1, 0, 0, 1, 1, 1$. Quelle est la probabilité de cet événement ? Que vaut R dans ce cas ?

▷ **4)** Pour tout $n \geq 2$ on note $p_n = \mathbb{P}(R = n)$.

(a) Que vallent les probabilités p_2 et p_3 ?

(b) Justifier que $\mathbb{P}(R = n + 2|X_1 = 0) = p_{n+1}$ et $\mathbb{P}(R = n + 2|X_1 = 1) = \frac{1}{3}p_n$.

(c) En déduire que $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$ puis p_n en fonction de n.

(d) La loi de R est-elle une loi géométrique ?