Université de Bourgogne L2

2023-2024

Analyse S4 : Examen, 06/05/2024. Durée : 2h.

Les documents et appareils électroniques sont interdits. Une rédaction soignée et rigoureuse est attendue.

A Question de cours

1. Définir les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer qu'elles sont équivalentes.
3. Dire si $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$ est un ouvert ou un fermé, ou ni l'un ni l'autre. Le justifier.

B Fonctions de plusieurs variables

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

1. Montrer que f est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques.
3. Pour chacun des points critiques, dire si f y prend un minimum local, maximum local, ou si c'est un point selle.

C Séries de fonctions

On considère la série de fonctions (lorsqu'elle est définie)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la série de terme général f_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   Indication : comparer avec la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
2. Montrer que la série de terme général f_n ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme général f_n converge uniformément sur $]a, +\infty[$.

D Intégration

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b pour que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^a(1+t^b)} dt$ soit convergente.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b pour que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^a(1+t^b)} dt$ soit convergente.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b pour que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{t^a(1+t^b)} dt$ soit convergente.