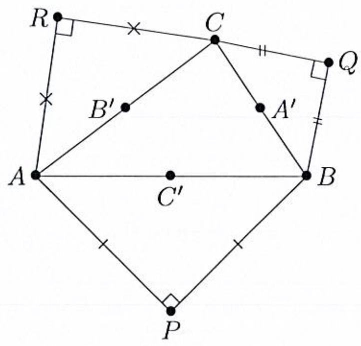
Examen - Géométrie. Durée 2h00.

Remarque : soignez votre rédaction et vos dessins. La présentation sera prise en compte dans la correction.

EXERCICE 1. **(Question de cours).**
Énoncer précisément le théorème de l'angle inscrit avec sa réciproque.

⋆⋆⋆

EXERCICE 2. **(Similitudes).**
On considère un plan affine euclidien orienté, rapporté au plan complexe $\mathbb{C}$.
Soit ABC un triangle non aplati orienté dans le sens direct (autrement dit, l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ admet une mesure en radian dans $]0,\pi[$).
On note A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
On construit les triangles (directement orientés) APB, BQC et CRA isocèles rectangles en P, Q et R respectivement. On note :



— s_1 la similitude directe de centre A qui envoie C sur R,

— s_2 la similitude directe de centre B qui envoie Q sur C.

On note aussi a, b, c les affixes respectives de A, B, C ; a', b', c' les affixes respectives de A', B', C' ; p, q, r les affixes respectives de P, Q, R.

1. On montre dans cette question que (QA), (RB) et (PC) sont concourantes.
   (a) Préciser le rapport et la mesure de l'angle en radian de s_1 et de s_2. Déterminer $s_1(P)$ et $s_2(C')$.
   (b) En déduire le centre, le rapport et la mesure de l'angle de $s_1 \circ s_2$. Quelle est la nature de cette similitude ?
   (c) Déterminer ~~et~~ $s_1 \circ s_2(Q)$. Déduire de la question 1(c) la nature du triangle QRC'.
   (d) En utilisant à nouveau 1(c), déterminer $s_1 \circ s_2(P)$. En déduire que (RB) et (PQ) sont perpendiculaires.
   (e) Un raisonnement analogue montre également que (PC) et (QR) sont perpendiculaires de même que (QA) et (RP). En déduire que les trois droites (QA), (RB) et (PC) sont concourantes en un point H que vous préciserez.
2. Isobarycentres de ABC, $A'B'C'$ et PQR.
   (a) Exprimer a', b', c' en fonction de a, b, c.
   (b) Démontrer que

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})a + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})c \\ p = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})b + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})a \\ q = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})c + \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})b \end{cases}$$

   (c) En déduire que ABC, $A'B'C'$ et PQR ont même isobarycentre.

⋆⋆⋆

EXERCICE 3. **Utilisation des barycentres)**
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, de direction vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. Soient P, Q, R trois points non alignés du plan. Soit $S = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} P & Q & R \\ p & q & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs des coefficients p et q pour que $PQRS$ soit un parallélogramme.
2. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

⋆⋆⋆

Exercice 4. **(Similitudes indirectes : transformations d'écriture complexe $z \mapsto a\bar{z} + b$)**
On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté au plan complexe $\mathbb{C}$. Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, on appelle **similitude indirecte** l'application $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z) = a\bar{z} + b$.

1. Vérifier que F est une bijection et que sa réciproque F^{-1} est encore une similitude indirecte dont on donnera l'écriture complexe.
2. Calculer $f \circ f(z)$. En déduire la nature de la transformation $F \circ F$ en fonction des valeurs de a et b.
3. On suppose que $|a| = 1$ et que $a\bar{b} + b = 0$. On pose $\omega = \frac{b}{2}$ et $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que le point Ω d'affixe ω est fixe par F. Exprimer $f(z)$ en fonction de $\bar{z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, ω et $\bar{\omega}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des points fixes de F est la droite $\mathcal{D}_\theta$ passant par le point Ω de vecteur directeur $\vec{v}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
   (c) Montrer que pour tout point M de $\mathscr{P} \setminus \mathcal{D}_\theta$, la droite $\mathcal{D}_\theta$ est la médiatrice de $[M\,F(M)]$. En déduire que F est une réflexion (appelée aussi symétrie orthogonale).
4. On suppose que $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b \neq 0$. On pose $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et on considère $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $u = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b)$.
   (a) En utilisant 2., montrer que F ne peut pas avoir de point fixe.
   (b) Vérifier que $2 \arg u = \arg a \ [2\pi]$.
   (c) On note T la translation de vecteur $\vec{u}$ et $S = T^{-1} \circ F$. Montrer que S est une réflexion dont l'axe est dirigé par $\vec{u}$ (utiliser la question 3 et 4(b)).
   (d) En déduire que F est la composée **commutative** $F = S \circ T = T \circ S$ d'une réflexion et d'une translation, le vecteur de translation étant un vecteur directeur de l'axe de la symétrie.
5. On suppose que $|a| \neq 1$.
   (a) En utilisant 2., montrer que F a un unique point fixe Ω et exprimer son affixe ω en fonction de a et b.
   (b) Exprimer $f(z)$ en fonction de $\bar{z}$, de $|a|$ de ω et de $\bar{\omega}$.
   (c) Soient H l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$ et $S = H^{-1} \circ F$. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont vous préciserez l'axe (utiliser la question 3).
   (d) En déduire que F est la composée **commutative** $F = S \circ H = H \circ S$ d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie, le centre de l'homothétie se trouvant sur l'axe de la symétrie.