Université de Bourgogne
Examen de Méthodes Mathématiques - Juin 2024
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I.

a) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = axt, \tag{1}$$

où a est une constante réelle

b) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Axt, \tag{2}$$

où $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice réelle.

Pour calculer une fonction f de la matrice A, on utilisera le théorème de décomposition spectrale : $f(A) = \sum_i f(\lambda_i)|u_i\rangle\langle u_i|$ avec les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres (normés) associés $|u_i\rangle$ de A.

Exercice II.

A) On résout l'équation différentielle de Laguerre, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de Frobenius

$$xy'' + (1-x)y' + \alpha\, y = 0. \tag{3}$$

1) Montrer que $x = 0$ est une singularité régulière.

2) A partir du développement en série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}, \tag{4}$$

(a) déterminer l'équation indicielle ;

(b) déterminer la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n.

3) Résoudre l'équation indicielle, et en déduire l'expression de la solution

$$y(x) \quad = \quad a_0\left[1 - \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2^2}x^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{3^2 2^2}x^3 - \cdots\right]. \tag{5}$$

4) Quelles sont les valeurs de α qui donnent une série avec un nombre de termes fini ? On les note $y(x) = L_\alpha(x)$. Exprimer $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ et $L_4(x)$ (on choisira la normalisation $a_0 = 1$).

B) Vérifier que

$$y_2(x) = y(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{6}$$

est une seconde solution, où $y(x)$ sont les solutions obtenues précédemment.

On reportera $y_2(x)$ dans l'équation et on déterminera la récurrence entre les coefficients b_{n+1} et b_n.

Exercice III. Dans cet exercice, on note la transformée de Fourier $F(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

Soit la fonction triangle $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| > 1 \end{cases}$

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$. La tracer.
2. En utilisant la formule de Parseval-Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\bar{G}(\nu)d\nu, \tag{7}$$

où on note $\bar{g}(x)$ le complexe conjugué de $g(x)$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx. \tag{8}$$