Probléme I : (5 points)
On considère un système à deux niveaux d'Hamiltonien H représenté dans la basc canoniquc $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ par la matricc :

$$H = \hbar \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension des paramètres A et B ?
2. Montrer que les paramètres A et B sont des paramètres réels.
3. Calculer les valeurs propres de H.
4. Le vecteur d'état $|\phi(t)\rangle$ peut se décomposer sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme :

   $$|\phi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle.$$

   Ecrire le système d'équations différentielles couplées auxquelles obéissent les composantes $c_+(t)$ et $c_-(t)$.
5. En déduire que c_+ et c_- vérifient la même équation différentielle :

   $$\ddot{c}_\pm + (\frac{\Omega}{2})^2 c_\pm = 0.$$

   On donnera l'expression de Ω en fonction de A et B. Quelle est l'interprétation physique de Ω ?

Probléme II : (5 points)
On considère une particule dans un triple puits de potentiel. On désigne par $|i\rangle$ ($i = 1, 2$ ou 3) l'état de la particule lorsqu'elle se trouve dans le puits numéro i et on suppose que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. On introduit dans le système un processus qui permet à la particule de passer d'un puits à l'autre par effet tunnel, avec une amplitude $T > 0$, ce qui conduit à l'Hamiltonien :

$$H = T(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$$

1. Ecrire la matrice Hamiltonienne dans la base $\{|i\rangle\}$.
2. Démontrer que l'opérateur permutation P défini par

   $$P|1\rangle = |2\rangle, \; P|2\rangle = |3\rangle, \; P|3\rangle = |1\rangle$$

   commute avec H.
3. Calculer P^3. En déduire les valeurs propres de P. Ces valeurs propres sont-elles réelles ? Ce résultat était-il attendu ?
4. Déterminer les vecteurs propres associés.
5. En déduire les valeurs propres de H et leur dégénérescence.

Probléme III : (10 points)
On considère une particule de spin $S = 1/2$ plongée dans un champ magnétique homogène et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On note $\vec{S}$ l'opérateur de spin de la particule et $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$ l'opérateur moment magnétique associé. On pose $\omega = -\gamma B$. On rappelle que $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ avec les matrices de Pauli définies par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'Hamiltonian H du problème
2. Quelles sont pour un Hamiltonien quelconque les équations de Schrödinger vérifiées par le ket $|\psi\rangle$, la fonction d'onde du système, et le bra associé $\langle\psi|$.
3. En déduire le théorème d'Ehrenfest :
$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[A,H]|\psi\rangle,$$
où A est une observable quelconque indépendante du temps.
4. Montrer la relation suivante :
$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z.$$
5. Montrer que les valeurs moyennes des composantes de l'opérateur de spin $\vec{S}$ vérifient :
$$\begin{cases} \frac{d\langle S_x\rangle}{dt} = -\omega\langle S_y\rangle \\ \frac{d\langle S_y\rangle}{dt} = \omega\langle S_x\rangle \\ \frac{d\langle S_z\rangle}{dt} = 0 \end{cases}$$
6. Déterminer l'évolution dans le temps des 3 composantes $\langle S_x\rangle$, $\langle S_y\rangle$ et $\langle S_z\rangle$. La condition initiale à $t = 0$ est donnée par :
$$\langle\vec{S}\rangle(0) = (S_{x0}, S_{y0}, S_{z0}).$$
7. Montrer que le mouvement de $\langle\vec{S}\rangle$ est un mouvement de précession autour de l'axe z. Quel est le temps nécessaire T_0 pour que le spin fasse un tour ? On dessinera schématiquement la trajectoire suivie par $\langle\vec{S}\rangle$.