

**Université de Bourgogne**

Licence 3 de physique

Examen seconde session de Mécanique quantique 2023-2024

**QCM**

Questionnaire à choix multiples :

réponse juste (1 pt), pas de réponse (0 pt), réponse fausse (-0.5 pt). Pour chaque question, une seule réponse est juste. Les réponses devront être justifiées sur une feuille séparée.

On considère un système quantique à deux niveaux. Une base  $\mathcal{B}$  de l'espace de Hilbert est donnée par les états  $|1\rangle, |2\rangle$ . L'état du système est décrit par une fonction d'onde  $|\psi(t)\rangle$  dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Dans la base  $\mathcal{B}$ , l'Hamiltonien  $H$  est donné par :

$$H = \cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x,$$

où  $\theta \in (0, \pi)$ . On rappelle que les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A tout temps  $t$ , la fonction d'onde du système peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle,$$

où les coefficients complexes  $c_k$  sont de module  $|c_k|$  et de phase  $\phi_k$ ,  $c_k = |c_k|e^{i\phi_k}$ .

1. L'opérateur d'évolution  $U(t) = \exp[iHt]$  est un opérateur :

- hermitien
- constant
- unitaire
- nilpotent
- Aucune de ces réponses

2. La fonction d'onde  $|\psi\rangle$  est dite normalisée si  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . Cela signifie que :

- $c_1^2 + c_2^2 = 1$
- $\phi_1 + \phi_2 = 0$
- $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$
- $\phi_1\phi_2 = 0$
- Aucune de ces réponses

3. Quelle est la trace de l'Hamiltonien  $H$  ?

- 0
- $-1$
- $2 \cos \theta$
- $\cos(2\theta)$
- Aucune de ces réponses

4. Quelles sont les valeurs propres de l'Hamiltonien  $H$  ?

- 0 et 1
- $-1$  et 0
- $-\cos \theta$  et  $\cos \theta$
- $-\sin \theta$  et  $\sin \theta$
- Aucune de ces réponses

5. Quelle est l'expression du bra  $\langle \psi |$  ?

- $\langle 1|c_1 + \langle 2|c_2$
- $\langle 1|c_1^* + \langle 2|c_2^*$
- $\langle 1||c_1| + \langle 2||c_2|$
- $\langle 1||c_1|^2 + \langle 2||c_2|^2$
- Aucune de ces réponses

### Problème

On considère un atome à deux niveaux d'énergie  $E_g = 0$  et  $E_e = \hbar\omega_0$ , correspondant à deux états normés et orthogonaux que nous noterons  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ . On supposera que les seuls états accessibles pour cet atome sont décrits par les vecteurs normés de l'espace de Hilbert sous-tendu par la base  $\mathcal{B} = \{|g\rangle, |e\rangle\}$ . Le Hamiltonien qui régit l'évolution temporelle de l'état de cet atome s'écrit donc simplement :

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|.$$

Cet atome est soumis à une excitation laser décrite par un champ électrique classique  $E(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t)$ . On peut montrer que l'Hamiltonien qui régit l'évolution de l'atome en présence du laser s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{D}\mathcal{E}(t),$$

où  $\hat{D}$  est un opérateur hermitien, appelé opérateur dipole, qui agit sur l'espace des états de l'atome et qui vérifie :

$$\langle e|\hat{D}|e\rangle = \langle g|\hat{D}|g\rangle = 0; \quad \langle e|\hat{D}|g\rangle = \langle g|\hat{D}|e\rangle = d.$$

L'état initial du système à  $t = 0$  est  $|\psi_0\rangle$ .

1. Ecrivez sous forme de matrices les opérateurs  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_0$  et  $\hat{D}$ . Montrez que  $\hat{D}$  est bien un opérateur hermitien.
2. Montrez que dans le cas où  $\mathcal{E}_0 = 0$ , l'état du système  $|\psi(t)\rangle$  à un temps  $t$  peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = c_g|g\rangle + c_e e^{-i\omega_0 t}|e\rangle.$$

On déterminera l'expression explicite des coefficients  $c_g$  et  $c_e$ .

3. On suppose désormais que  $\mathcal{E}_0 \neq 0$  mais indépendant du temps et que  $|\psi_0\rangle = |g\rangle$ . Montrez que le ket  $|\psi(t)\rangle$  peut toujours s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t)|g\rangle + c_e(t)e^{-i\omega_0 t}|e\rangle.$$

4. Montrez que ces deux coefficients sont solutions du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} i \frac{dc_g}{dt} &= \frac{\Omega}{2} c_e + \frac{\Omega}{2} e^{-2i\omega_0 t} c_e \\ i \frac{dc_e}{dt} &= \frac{\Omega}{2} c_g + \frac{\Omega}{2} e^{2i\omega_0 t} c_g \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\Omega = -d\mathcal{E}_0/\hbar$ , appelée pulsation de Rabi.

5. Quelle est la dimension physique de la pulsation de Rabi ?
6. On suppose ensuite que l'on peut négliger les termes de la forme  $e^{\pm 2i\omega_0 t}$  dans les équations précédentes. Montrez qu'en faisant cette approximation, les coefficients  $c_g$  et  $c_e$  sont solutions d'un système différentiel d'équations couplées du premier ordre linéaire et à coefficients constants.
7. Résolvez ce système pour la condition initiale  $|\psi_0\rangle = |g\rangle$ .
8. Quelle est la probabilité de trouver l'atome dans l'état  $|e\rangle$  à un instant  $t$  quelconque ?
9. En déduire qu'une impulsion laser, d'une durée que l'on précisera, permet de faire passer de manière certaine l'atome de l'état  $|g\rangle$  à l'état  $|e\rangle$ .