Université de Bourgogne *Licence de Mathématique*

Département de Mathématiques *Techniques de Programmation*

Polynômes de Tchebychev

Examen du 21 mai 2024

Durée 2h, tous les documents sont permis, la communication est interdite

Les polynômes de Tchebychev T_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ forment une base fonctionnelle orthogonale sur l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire qu'ils sont orthogonaux par rapport au produit scalaire

$$\langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{ou} \quad a = \begin{cases} \pi \text{ si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

et une fonction peut être développée de manière unique comme une somme infinie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n T_n(x), \quad \text{ou} \quad c^n = \langle f, T_n \rangle = \frac{1}{a} \int_{-1}^{1} f(x) T_n(x) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1}$$

Considérons un sous-espace fini, engendré par T_n, où $n = 0, \ldots, N$, par exemple $N = 12$. Créez une classe qui représente les fonctions dans leur expansion finie de Tchebychev. Pour trouver les coefficients c^n dans (1), utilisez la quadrature de Gauss-Tchebyshev avec N points.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=0}^{N} f(x_i) w_i, \quad x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad w_i = \frac{\pi}{N}$$

et la formule recursive pour les polynômes de Tchebychev

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{2}$$

Remarque : vous n'avez pas besoin de trouver les polynômes explicitement, juste leurs valeurs aux points d'intégration.

Implementez des méthodes pour

— La somme et la différence de deux fonctions dans cette classe.

— La différenciation d'une fonction f dans la classe $g = f'$ avec (2) et la formule

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T'_{n-1}(x)$$

— La division par x : $g(x) = f(x)/x$ avec la formule (2)

Proposez des exemples qui testent votre code.

Lesquelles de ces méthodes peuvent être implémentées comme méthodes magiques ?