

Polynômes de Tchebychev du deuxième type

Examen du 21 mai 2024

Durée 2h, tous les documents sont permis, la communication est interdite.
Envoyez vos réponses à Nikola.Stoilov@u-bourgogne.fr

Les polynômes de Tchebychev du deuxième type U_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ forment une base fonctionnelle orthogonale sur l'intervalle $[-1, 1]$, c'est-à-dire qu'ils sont orthogonaux par rapport au produit scalaire

$$\langle U_n, U_m \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et une fonction peut être développée de manière unique comme une somme infinie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n U_n(x), \quad \text{ou} \quad c^n = \langle f, U_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx \quad (1)$$

Considérons un sous-espace fini, engendré par U_n , où $n = 0, \dots, N$, par exemple $N = 12$ (pour les fonctions analytiques ce choix donne une précision numérique de $\approx 10^{-10}$). Créez une classe qui représente les fonctions dans leur expansion finie de Tchebychev. Pour trouver les coefficients c^n dans (1), utilisez la quadrature de Gauss-Tchebyshev avec N points.

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{i=0}^N f(x_i) w_i, \quad x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right), \quad w_i = \frac{\pi}{N}$$

et la formule recursive pour les polynômes de Tchebychev

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = x, \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad (2)$$

Remarque : vous n'avez pas besoin de trouver les polynômes explicitement, juste leurs valeurs aux points d'intégration.

Implementez des méthodes pour

- La somme et la différence de deux fonctions dans cette classe.
- La différenciation d'une fonction f dans la classe $g = f'$ avec (2) et les formules

$$U_{n+1} = xU_n + T_{n+1}, \quad U'_n = \frac{(n+1)T_{n+1} - xU_{n-1}}{x^2 - 1}$$

où T_n est polynome de Tchebychev de premier type.

— La division par x : $g(x) = f(x)/x$ avec la formule (2)
Proposez des exemples qui testent votre code.
Lesquelles de ces méthodes peuvent être implémentées comme méthodes magiques ?