Licence de Mathématiques

2023-2024

Intitulé de l'enseignement: Théorie des Probabilités

Année: L3

Date: 21 juin 2024

Examen - Session 2

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents, téléphones et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont la densité d'une variable aléatoire. Calculer le cas échéant leur fonction de répartition et déterminer si elles admettent une espérance. Dans ce cas, la calculer également.

1. $f_1(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$

2. $f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3. $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2 (Produit) **:** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et de carré intégrable. On note m leur espérance commune. Étudier la convergence presque sûre de la suite

$$S_n = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n + X_nX_{n+1}}{n}.$$

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,\theta]$ et on note $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$.

▷ **1)** Montrer que $n(\theta - M_n)$ converge en loi et préciser la limite.

▷ **2)** Montrer que $\theta - M_n$ converge en probabilité vers 0.

▷ **3)** Montrer que M_n converge presque sûrement vers θ.

Exercice 4 (Tir à l'arc) **:** Théo fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose que Théo est suffisamment maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées (X,Y) soit uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

▷ **1)** Quelle est la densité du couple (X,Y)?

▷ **2)** Déterminer les lois marginales de X et de Y.

▷ **3)** Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

▷ **4)** Déterminer la densité de la variable aléatoire représentant le carré de la distance au centre de la cible $R^2 = X^2 + Y^2$.

▷ **5)** Léa rejoint Théo sur le point de tir. Lorsque Léa tire, le point d'impact est uniformément distribuée sur l'ensemble $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$. Quelle est la probabilité que la flèche de Léa soit plus proche du centre que celle de Théo?

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire.

On souhaite démontrer que $\phi_X(1) = 1$ si et seulement si $\mathbb{P}_X(\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}) = 0$.

▷ **1)** On suppose que $\phi_X(1) = 1$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos x)\, d\mathbb{P}_X(x) = 0.$$

▷ **2)** En déduire que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}) = 0$.

▷ **3)** Démontrer la réciproque.

▷ **4)** Démontrer que ces deux conditions sont aussi équivalentes à ϕ_X est 1-périodique.

Exercice 6 (Entropie) : Si X est une variable aléatoire admettant une densité f, on appelle entropie de X la quantité suivante (si elle existe)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx.$$

▷ **1)** Calculer l'entropie d'une variable aléatoire uniforme.

▷ **2)** On suppose que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Démontrer que

$$h(X) = \frac{1}{2}\left(1 + \ln(2\pi\sigma^2)\right).$$

▷ **3)** On souhaite prouver que, parmi les variables aléatoires centrées et de variance donnée, les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On fixe donc Y une variable aléatoire centrée, de densité f et de variance σ^2, admettant une entropie. On note φ la densité de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On supposera dans la suite que la fonction

$$x \mapsto f(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que

$$h(Y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ln \varphi(x) dx.$$

▷ **4)** Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

▷ **5)** En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \ln(2\pi\sigma^2)\right)$.