Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2023-2024
Juin 2024

Examen de Topologie

Aucun document et aucun appareil électronique (téléphone inclus) n'est autorisé.

Durée : 2 heures

Question de cours 1. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une application, et $a \in E$.

(1) Donner la définition de f *est continue en* a.

(2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

  (a) L'application f est continue en a.

  (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in E$, $d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

  (c) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Question de cours 2.

(1) Soit (E, d_E) un espace métrique. Donner les définitions de *recouvrement de* E *par des ouverts*, de *sous-recouvrement* de E et de *sous-recouvrement fini* de E. Donner la définition de *espace compact*.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Montrer que $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soient (E, d) un espace métrique et $\delta : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\delta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

(1) Montrer que δ est une distance sur E.

(2) Montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes.

Exercice 2. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel réel normé et $p : E \to E$ un projecteur continu.

(1) Montrer que $p' = \mathrm{id} - p : E \to E$ est aussi un projecteur continu.

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont fermés dans E.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont tous les deux complets si et seulement si E est complet.