Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2023-2024
Janvier 2024

Topologie
Contrôle terminal

Aucun document et aucun appareil électronique (téléphone inclus) n'est autorisé.

Question de cours 1. Soient $((E_i, d_i))_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces métriques et $E = \prod_{i=1}^n E_i = E_1 \times \cdots \times E_n$. On note $\delta_1, \delta_2, \delta_\infty : E \times E \to \mathbb{R}_+$ les applications définies par, pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E$,

$$\delta_1(x,y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)\,, \quad \delta_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^2\right)^{1/2}\,,$$
$$\delta_\infty(x,y) = \max\{d_i(x_i,y_i) \mid 1 \leq i \leq n\}\,.$$

On admet l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}$$

pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, et on admet que δ_1 et δ_∞ sont des métriques sur E.

(1) Montrer que δ_2 est une métrique sur E.

(2) Montrer que les trois métriques δ_1, δ_2 et δ_∞ sont équivalentes.

Question de cours 2. Soient X un ensemble non vide et (E, d_E) un espace métrique.

(1) Donner la définition d'*application bornée* de X dans E.

On note $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E.

(2) Soit $\delta : \mathcal{F}_b(X,E) \times \mathcal{F}_b(X,E) \to \mathbb{R}_+$ l'application définie par

$$\delta(f,g) = \sup\{d_E(f(x), g(x)) \mid x \in X\}\,.$$

Montrer que δ est bien définie et est une métrique sur $\mathcal{F}_b(X,E)$.

(3) Montrer que, si (E, d_E) est complet, alors $\mathcal{F}_b(X,E)$ muni de la métrique δ est complet.

Exercice 1. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $p : E \times F \to E$, $(x,y) \mapsto x$, la projection sur la première coordonnée, $f : E \to F$ une application, et $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F$ le graphe de f. On suppose que $E \times F$ est muni de la distance produit δ_∞.

(1) Montrer que f est continue si et seulement si $p|_\Gamma : \Gamma \to E$ est un homéomorphisme.

(2) On suppose que (F, d_F) est compact. Montrer que, si Γ est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

(3) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que Γ est fermé dans $E \times F$ et que f n'est pas continue.

Exercice 2. Soient (E, d) un espace métrique et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E.

(1) Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(d(a_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite que l'on note $f(x)$.

(2) Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ est continue.

(3) Calculer $\inf_{x\in E} f(x)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que cette borne soit atteinte.

(4) Montrer que, si (E, d) n'est pas complet, alors il existe une application continue $g : E \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée.