Examen Algèbre linéaire et bilinéaire L3, session 2

– durée : 2 heures –

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que les matrices A et B sont diagonalisables et commutent.
(ii) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont des matrices diagonales.

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Déterminer la réduction de Jordan J de A.
(ii) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = J$.
(iii) Déterminer les invariants de similitude et la réduction de Frobenius de A.

Exercice 3. Soit $r \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]_{\leq r}$. On définit un endomorphisme $\varphi : E \to E$ par $\varphi(P) = P'$.
(i) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.
(ii) Montrer que φ est un endomorphisme cyclique.
(iii) En déduire la réduction de Frobenius et les invariants de similitude de φ.
(iv) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$ est la réduction de Frobenius de φ.

Exercice 4. Soit $(E, \langle\,\rangle)$ un espace hermitien de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que $\langle f(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.
(i) Montrer que $\langle f(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in E$. (Indication: développer les expressions $\langle f(x+y), x+y\rangle$ et $\langle f(x+iy), x+iy\rangle$)
(ii) En déduire que $f = 0$.
(iii) Ce résultat est-il valable si $(E, \langle\,\rangle)$ est un espace euclidien ?