

EXAMEN TERMINAL

Mai 2025

Durée : 3h

Exercice 1. (TD)

1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $\sum \|x_n\| < \infty$, la série $\sum x_n$ converge dans X .
2. Soit E un espace de Banach, F un evn et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective tels que : il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = T(x)$ et $\|x\| \leq C\|y\|$. Montrer que F est un espace de Banach.

Exercice 2. (*Séries de Fourier*) Soit f une fonction 2π -périodique, impaire, définie par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$; et $f(n\pi) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Dessiner le graphe de f sur une période.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f .
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera $S(f)$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = S(f)(x)$.

5. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$.

6. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(Indication : penser à la formule de Parseval)

7. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

(Indication : on pourra décomposer la somme sur les nombres pairs et les impairs)

Exercice 3. (*Espaces L^p*) Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \mathbf{1}_{[0,1]}(x^2 + y^2).$$

1. Montrer que $f \notin L^1([0, 1[\times]0, 1[, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. (Indication : on pourra utiliser un changement de variable en coordonnées polaires)
2. Montrer que $\sqrt{f} \in L^1([0, 1[\times]0, 1[, \lambda)$ et calculer $\|\sqrt{f}\|_1$.
3. En déduire que $L^1([0, 1[\times]0, 1[, \lambda)$ n'est pas inclus dans $L^2([0, 1[\times]0, 1[, \lambda)$. Est-ce que $L^2([0, 1[\times]0, 1[, \lambda)$ inclus dans $L^1([0, 1[\times]0, 1[, \lambda)$?

Exercice 4. (Ascoli) On considère l'espace de Banach $E := (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $F \subset E$ un s.e.v fermé tel que tous les éléments de F sont de classe C^1 .

1. (a) Rappelez l'énoncé des théorèmes d'Ascoli et de graphe fermé.
- (b) Montrer que l'application $T: F \rightarrow E$ définie par $T(f) = f'$ est continue.
- (c) En déduire que la boule unité de F est uniformément équicontinue (c-à-d que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $f \in B(0, 1) \cap F$ et tout $x, y \in [0, 1]$, $|x - y| < \eta$ implique que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$).
- (d) Montrer que F est de dimension finie.

2. On rappelle que $\mathcal{C}_b([0, +\infty[, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues bornées de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f(x)|$ est un espace de Banach.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(t) = \cos \sqrt{t + (2n\pi)^2}$.

- (a) Montrez que pour tous $a, b > 0$, $\sqrt{a+b} - \sqrt{b} \leq \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}$. Indication : On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.
- (b) Montrer que pour tout $t, s \geq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$|f_n(t) - f_n(s)| \leq \frac{1}{4n\pi} |s - t|.$$

- (c) En déduire que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est équicontinue et tend simplement vers 1.
- (d) Montrez qu'elle ne converge pas uniformément vers 1.

Indication : On déterminera t_n tel que $f_n(t_n) = -1$.

- (e) L'ensemble $\mathcal{A} = \{f_n : n \geq 1\}$ est-il compact dans $\mathcal{C}_b([0, +\infty[, \mathbb{R})$?