

Contrôle Terminal du 19/06 (session 2)

Durée : 2h. Les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Vous pouvez bien sûr admettre les résultats d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. On considère la matrice A et le vecteur b suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU (sans permutation) de A .
2. Résoudre $Ax = b$ à l'aide de la factorisation précédente.

Exercice 2. 1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n \times n}$, c'est-à-dire une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.

2. En déduire que $\|\cdot\|_F : A \mapsto \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^{n \times n}$ (dite *norme de Frobenius*).
3. Montrer que la norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$ est une norme matricielle.
4. Montrer que la norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$ n'est pas une norme induite (pour $n > 1$).
5. Montrer que pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Calculer la norme de Frobenius $\|A\|_F$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer à l'aide du procédé de Gram-Schmidt la factorisation QR de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Écrire la méthode de Jacobi pour la résolution du système linéaire.
(b) Calculer les 2 premières itérations en partant de $x_0 = 0$.
(c) La méthode converge-t-elle ? Justifier.
2. (a) Écrire la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système linéaire.
(b) Calculer les 2 premières itérations en partant de $x_0 = 0$.
(c) La méthode converge-t-elle ? Justifier.