Contrôle Terminal du 08/01

Durée : 2h. Les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Vous pouvez bien sûr admettre les résultats d'une question pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible admettant une factorisation LU sans permutation.

1. Qu'appelle-t-on *factorisation LU sans permutation*? En particulier quelles sont les propriétés demandées aux matrices L et U?
2. Montrer qu'une telle factorisation LU sans permutation est unique.

Exercice 2. On considère le sytème linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Écrire la méthode de Jacobi pour la résolution du système linéaire.
   (b) Calculer les 2 premières itérations en partant de $x_0 = 0$.
   (c) La méthode converge-t-elle ?
2. (a) Écrire la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système linéaire.
   (b) Calculer les 2 premières itérations en partant de $x_0 = 0$.
   (c) La méthode converge-t-elle ?

Exercice 3. Calculer à l'aide du procédé de Gram-Schmidt la factorisation QR de

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique. On rappelle que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ en base orthonormée.

1. Que signifie ce rappel en terme de vecteurs propres et de valeurs propres ? Comment cela se traduit-il matriciellement ?

Soit $(x_k)_k$ une suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{k+1} = \dfrac{Ax_k}{\|Ax_k\|_2}$ pour $k \geq 0$.

2. Montrer que la suite $(x_k)_k$ vérifie $x_k = \dfrac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}$ pour tout $k \geq 0$.

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$. On décompose x_0 dans cette base :

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que
$$A^k x_0 = \lambda_n^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k f_i + \alpha_n f_n \right).$$
4. En déduire que
$$\|A^k x_0\|_2 = |\lambda_n|^k \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^{2k} + \alpha_n^2}.$$

On suppose que $x_0 \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda_n I)^{\perp}$.

5. Comment cette hypothèse se traduit-elle sur les α_i ?

On suppose de plus que $\lambda_n > |\lambda_{n-1}| \geq \dots \geq |\lambda_1|$ (en particulier $\lambda_n > 0$).

6. Montrer que
$$\frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} f_n.$$
7. En déduire que la suite $(x_k)_k$ converge vers un vecteur propre de A de norme 1 associé à la valeur propre λ_n.
8. En déduire que la suite $(\langle Ax_k, x_k\rangle)_k$ converge vers λ_n.
9. Synthétiser ce qui a été prouvé sous la forme d'un théorème (avec ses hypothèses et ses conclusions).
10. En déduire un algorithme itératif (en pseudo-code) qui calcule une approximation de λ_n et d'un vecteur propre unitaire associé en n'effectuant qu'un produit matrice-vecteur par itération. Quel critère d'arrêt peut-on considérer ?