Université de Bourgogne
Licence3 SPI parcours électronique
Année universitaire : 2024/2025

Examen d'automatique

Durée : 2H
Documents autorisés

Exercice 1

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -5x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

1) Trouver le point de fonctionnement (x_1^*, x_2^*, u^*) du système. Vérifier que le triplet $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, 3, -6)$ correspondant à un point de fonctionnement.
2) Prouver que la linéarisation du système (1) autour du point de fonctionnement (0, 3, -6) donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \qquad (2)$$

Nous pouvons écrire le nouveau système linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U \qquad (3)$$

Où $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ est le nouveau vecteur de variables d'état et U est la nouvelle commande.

3) Analyser la stabilité du système (3) en calculant ses valeurs propres.
4) Trouver le gain $K = [k_1 \quad k_2]$ de la commande $u=-KX$ qui stabilise le système (3). Les pôles désirés du système stabilisé sont (-3, -2).

Concernant la sortie (mesure) du système, nous avons 2 cas :

a) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$

b) $Y = \dfrac{X_2}{10}$

5) Analyser l'observabilité du système dans les deux cas.
6) concevoir un observateur de Luenberger pour le cas (a). Les pôles désirés de l'observateur sont (-4, -3). Le choix de ces pôles par rapport à la commande précédente est-il judicieux ? Justifier.

Exercice 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

1) Est-ce que la variable x_3 est commandable ? Justifier.

2) Donner l'expression de la solution de la variable $x_2(t)$ dans le cas d'une entrée quelconque, un $t_0 = 0$ et un état initial $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3) Est-ce que la variable $x_2(t)$ est stable ? justifier.

4) Donner la solution $x_3(t)$ dans le cas : $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

5) Donner la solution $x_2(t)$ dans le cas discret pour une période d'échantillonnage T_e.