Paludisme

CT du 21 mai 2025

Durée 2h, tous les documents sont permis, la communication est interdite

Pour modéliser le paludisme, nous devons suivre deux populations : les humains et les moustiques. Tous deux peuvent être porteurs de paludisme, la maladie se transmettant par les piqûres de moustique. Les humains peuvent être infectés par un moustique porteur de la maladie, et les moustiques peuvent être infectés par en piquant d'un être humain porteur de la maladie. Nous disposons des données empiriques suivantes :

Piqûres par jour et par moustique $q_{pj} = 0,1 h/jm$.

Probabilité de transmission du moustique à l'humain $p_h = 0,3$.

Probabilité de transmission de l'humain au moustique $p_m = 0,5$.

Temps de récupération d'un être humain $t_h = 70,0j$

Durée de vie d'un moustique $t_m = 10,0j$ (Les moustiques nouvellement éclos ne sont pas infectés.)

La population humaine est de 10^8 au total, la population de moustiques est de 10^{10} au total. Ces deux populations restent constantes tout au long de notre simulation. Nous pourrions modéliser la propagation de la maladie grâce aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{H} &= c_1(10^8 - H)M + c_2 H + c_3 M \\ \dot{M} &= c_4(10^{10} - M)H + c_5 H + c_6 M \end{aligned}$$

Où H correspond au nombre d'humains *infectés* et M au nombre de moustiques *infectés*. Au jour zéro, il y a 10^7 moustiques infectés. Aucun humain n'est infecté.

1. Exprimer les coefficients $c_1 \dots c_6$ par les constantes q_{pj}, p_h, p_m, t_h et t_m. Attention aux signes et notez que certains de ces coefficients peuvent être nuls. N'hésitez pas à ajouter d'autres équations si vous le jugez nécessaire.
2. Résolvez numériquement les équations par la méthode d'Euler directe (ED) et complétez le code au verso. La méthode ED résout le problème de la valeur initiale :

   $$\dot{y} = f(y,t),\ y(0) = y_0 \quad \text{avec} \quad y_{k+1} = y_k + h f(y_k, t_k).$$

   Quel est le pas maximal h pour lequel la méthode est numériquement stable ? Pourquoi ? Quels sont les avantages de cette méthode ?
3. Résolvez numériquement les équations par la méthode de Crank-Nicholson (CN) et complétez le code au verso. La méthode CN résout le problème de la valeur initiale

   $$\dot{y} = f(y,t),\ y(0) = y_0 \quad \text{avec} \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_k, t_k) + f(y_{k+1}, t_{k+1})).$$

Quel est le pas maximal h pour lequel la méthode est numériquement stable ? Pourquoi ? Quels sont les avantages de cette méthode ?

Exemple de code C ; n'hésitez pas à ajouter ou supprimer des lignes de code ou des variables si vous le jugez nécessaire.

paludisme_etu.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#define N 10000
int main() {
    double h = 0.1; // j
    double T_max = 700; // j
    double *H = (double *)malloc(N * sizeof(double));
    double *M = (double *)malloc(N * sizeof(double));
    double a,b,c;
    double q_pj = .1, p_h = .3, p_m =.5, t_h = 70., t_m= 10.;
    // valeurs initiales
    H[0] = ...;  M[0] = ...;
    int k = 0;

    while ( .......... && k<N ) {
        // Euler Directe
        M[k+1] = ...

        H[k+1] = ...

        //Crank-Nicholson
        a = ...

        b = ...

        c= ...

        M[k+1] = ...

        H[k+1] = ...

        k = k+1;


        }
    return 0;}
```